Костадин Тренчевски
Анета Гацовска
Надица Ивановска

МАТЕМАТИКА ЗА ЕКОНОМИСТИ

ЗА III ГОДИНА НА ЧЕТИРИГОДИШНОТО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

ЕКОНОМСКО - ПРАВНА И ТРГОВСКА СТРУКА
ТЕХНИЧАР ЗА ТРГОВИЈА И МАРКЕТИНГ

Рецензенти:

д-р Билјана Крстеска, професот на ПМФ, УКИМ, Скопје, претседател
Лидија Кузмановска, професор во СУГС „Лазар Танев“, Скопје, член
Љубица Димитрова, професор во СОУ „Ѓошо Викентиев“, Кочани, член

Лектор:

Маја Цветковска

Издавач:

Министерство за образование и наука на Република Македонија

Печати:

Графички центар дооел, Скопје

Со решение на Министерот за образование и наука на Република Македонија
бр. 22-4386/1 од 29.07.2010 година се одобрува употребата на овој учебник.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека “Св.Климент Охридски” , Скопје
512 . 1 (075.3)
51 - 77 (075.3)
ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Математика за економисти за III година на четиригодишното стручно образование: економско-правна и трговска струка техничар за трговија и маркетинг / Костадин Тренчевски, Анета Гацовска, Надица Ивановска. - Скопје: Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2011, - 288 стр. : граф. прикази ; 29 см
ISBN 978-608-226-177-5
1. Гацовска, Анета [автор] 2. Ивановска, Надица [автор]
COBISS.MK-ID 86465034

Предговор

Учебникот **МАТЕМАТИКА ЗА ЕКОНОМИСТИ** за трета година на четиригодишното стручно образование е пишуван според наставната програма за истоимениот задолжителен предмет за трета година на четиригодишното стручно образование. Наменет е пред сé, според наставниот план за учениците од економско правната и трговската струка во образовниот профил техничар за трговија и маркетинг. Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на наставата. Учебникот се состои од девет тематски целини. Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна содржина, наставна единица, дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, која претставува продолжување на работата на часот и таа е највисок степен на самостојна работа на ученикот. На крајот од учебникот се дадени кратки одговори или решенија на задачите, а по избор на авторите некаде и упатство за нивно решавање.

Првата наставна тема ,,**Проста каматна сметка**'' има за цел да го оспособи ученикот да применува простата каматна сметка, терминската сметка, дисконтната сметка и влоговна сметка. Се усвојуваат и поимите за кредитна сметка, жиро-сметка и трансакциска сметка.

Совладувањето на материјалот изложен во втората наставна тема ,,**Благородни метали, валути и девизи**'' дава можност за стекнување на знаења од областа на благородните метали, како и техника за пресметување на финост, маса на благородни метали во легури и маса на легури. Освен тоа ученикот се запознава со поимите валута и девизи, при што посебен акцент е ставен на решавање на задачи во врска со купопродажба на валути и купопродажба на девизи.

Треттата наставна тема ,,**Експоненцијални и логаритамски равенки**'' е насочена кон воведување на поимите степен со реален показател и логаритам. Ова претставува појдовна основа за развивање на техники за решавање на одделни видови експоненцијални и логаритамски равенки.

Со совладување на материјалот кој се однесува на четврттата наставна тема ,,**Тригонометриски функции од остар агол**'' ученикот ќе се стекне со основни знаења од областа на тригонометријата, што подразбира усвојување на основните тригонометриски функции синус, косинус, тангенс и котангенс од остар агол, како и нивна примена во геометријата и практиката пошироко.

Во петтата тема ,,**Права во рамнина**'' учениците се упатуваат на усвојување на методите на аналитичката геометрија во рамнина. Специјално, ќе се запознаат со формулите за: пресметување на растојание меѓу две точки, делење на отсечка во даден однос и пресметување на плоштина на триаголник. Во продолжение ќе се запознаат со разните видови равенки на права. На крајот од изложениот материјал ќе научат да решаваат метрички проблеми, во смисла на пресметување на агол мегу две прави и пресметување на растојание од точка до права.

Совладувањето на материјалот изложен во шестата тема ,,**Прогресии**'' овозможува проширување на знаењата на учениците во врска со низите од реални броеви. Специјално тие ќе се запознаат со аритметичката и геометриската прогресија, со формулите за пресметување на општ член на аритметичка и геометриска прогресиј, и со формулите за пресметување на збир на првите n членови на геометриска и аритметичка прогресија.

Материјалот изложен во темата ,,**Сложена каматна сметка**'', термин кој понатаму ќе го означуваме со кратенката i/i, овозможува проверување на познавањата на ученикот за простата каматна сметка и усвојување на поимот сложена каматна сметка. Се разгледува антиципативното и декурзивното вкаматување, при што ученикот ќе стекне вештини за пресметување на каматната стапка, каматата и периодот на вкаматување.

Во осмата тема ,,**Периодични вложувања и периодични примања**'' ученикот ги запознава антиципативното и декурзивното вложување и пресметува крајна вредост при антиципативното и декурзивното вложување. Исто така се запознава со поимите рента, миза, дисконтирана и дисконтна вредност. На крајот решава сложени проблеми со примена на сложена каматна сметка, влогови и ренти.

Во последната, деветтата тема ,,**Заеми**'', ученикот се запознава со поимите заем, амортизационен период, ануитет, отплата. Се пресметуваат заеми со еднакви ануитети, се пресметуваат отплати, заеми со заокружени ануитети и за различните видови заеми се изработуваат амортизациони планови.

При реализирање на програмата од овој учебник наставникот може лесно да настојува на самостојна работа од страна на учениците.

Посебна благодарност им должиме на рецензентите на овој учебник, чии сугестии и забелешки придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците од економско – правната струка да се запознаат со содржини кои ќе им бидат од корист во нивното понатамошно професионално усовршување.

Мај, 2010 Авторите

СОДРЖИНА

7. СЛОЖЕНА КАМАТНА СМЕТКА.. 159

8. ПЕРИОДИЧНИ ВЛОЖУВАЊА (ВЛОГОВИ) И ПЕРИОДИЧНИ ПРИМАЊА(РЕНТИ).. 193

9. ЗАЕМИ.. 237

1. ПРОСТА КАМАТНА СМЕТКА

1. 1. Пресметување на проста камата

1.1.1. Основни поими

Секојдневното живеење е пропратено со вложување на средства во банка, на трансакциски сметки, штедни книшки, кредитни картички. Платата и надоместоците на платата, пензиите, заштедите, најчесто се парични средства кои и се отстапени на банката на определен временски период, со можност да се подигнат кога за тоа има потреба. Во меѓувреме, банката ги користи средствата, а за тоа на вложувачот банката му пресметува камата. Исто така, често пати граѓаните имаат потреба да позајмат парични средства од банката, на определен период, но заради користењето на таквата услуга, должни се на банката да ѝ платат одреден процент од износот, односно камата.

Кредитни односи се воспоставуваат помеѓу должникот и доверителот. Во основа на ваквите односи е каматата. **Каматата** претставува процентен износ од вложената сума, односно од позајмената сума, како парична надокнада која должникот му ја плаќа на доверителот, односно како цена за користење на позајмената сума.

Доколку подигаме заем (кредит), тогаш банката е **доверител**, а корисникот на заемот е **должникот** кој за користење на средствата на банката ѝ плаќа соодветна камата. Доколку пак вложуваме средства во банка, банката е корисник на средствата и на доверителот му исплаќа камата.

Каматата (интересот) се пресметува во облик на процентен износ на секои 100 парични единици од позајмениот износ, но се разликува од обичниот процент. Причината е во тоа што при пресметувањето на каматата предвид се зема не само процентот, туку и времето на кое средствата се позајмени.

Наједноставни примери за пресметување на камата се: штедните влогови, кредитирањето на граѓаните и претпријатијата, потрошувачките кредити, како и дебитните и кредитните картички.

Доколку каматата се пресметува само на капиталот вложен на иста основна сума во секој период на пресметување на каматата, тогаш се нарекува **проста камата**.

Пресметувањето на простата камата, како и останатите величини од кои таа зависи, се нарекува **проста каматна сметка**. Четирите основни величини кои се јавуваат при проста каматна стапка се:

- основна сума (основен капитал, главница) K
- пресметана камата i
- каматна стапка (во проценти) p, инаку еднаква на камата за 100 денари за единица време
- времето за кое се пресметува каматата t.

Каматната стапка најчесто се задава за една година, иако може да се користи и каматна стапка дадена за период помал од една година: полугодие (семестар), тримесечје (квартал), месец и слично.

Времето за кое се пресметува каматата може да биде зададено во години, месеци или денови, но по договор може да се користи дека годината има 365 дена, а месеците се бројат календарски, но може, заради поедноставно пресметување, годината да ја сметаме со 360 дена, а месеците со 30 дена.

Каматата може да се пресметува на почеток од периодот или на крај на периодот, но за тоа ќе зборуваме понатаму.

Често пати, ќе го користиме и поимот акумулирана вредност, која е основната сума зголемена за пресметаната камата $(K+i)$.

1.1.2. Основни врски помеѓу величините при пресметување на проста камата

Во следниве примери ќе ги илустрираме врските помеѓу величините при пресметување на проста камата.

1. Колкава камата ќе донесе капитал од 34500 денари, вложени во банка за време од 4 години, со каматна стапка 8%?

За време од една година, за капиталот од 34500 денари, пресметаната камата изнесува:

$$\frac{8}{100}\cdot 34500 = 2760 \text{ денари.}$$

Бидејќи каматата се пресметува на основниот капитал, износот на каматата за втората година повторно е 2760 денари, а исто толку изнесува и каматата за секоја наредна година. Оттука, за време од 4 години, пресметаната камата е четири пати поголема од онаа пресметана за една година. Тогаш, вкупната камата е:

$$i = \frac{8}{100}\cdot 34500\cdot 4 = 11040 \text{ денари.} \;\blacklozenge$$

Ако последната пресметка ја запишеме со општите ознаки, пресметаната камата е:

$$i = \frac{Kp}{100}$$

за време од една година, односно:

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{100}}$$

за време од t години.

Притоа, простата камата, за време зададено во години, може да се претстави во основна пропорција, која гласи:

$$\boxed{K : i = 100 : p\cdot t}$$

од која лесно може да се изведат и другите величини во простата каматна сметка.

2. Која вложена сума ќе донесе камата од 9600 денари, за време од 8 години, со каматна стапка од 5%?

Имајќи ја предвид пропорцијата која ги поврзува основните величини, основната сума се пресметува по формулата:

$$\boxed{K = \frac{100i}{pt}}.$$

Во конкретниот пример, вложената сума изнесува:

$$K = \frac{100 \cdot 9600}{5 \cdot 8} = 24000 \text{ денари. } \blacklozenge$$

На сличен начин се добиваат и формулите за временскиот период на кој се пресметува простата камата, како и каматната стапка. Ќе ги изведиме соодветните формули низ примери.

3. Колку години треба да биде вложен основен капитал од 54000 денари, за банката да исплати камата од 6480 денари, со каматна стапка од 6%?

Од основната пропорција добиваме

$$\boxed{t = \frac{100i}{Kp}}.$$

Тогаш,

$$t = \frac{100 \cdot 6480}{54000 \cdot 6} = 2 \text{ години.}$$

4. Пресметај ја каматната стапка со која за долг од 58000 денари се пресметува камата од 8700 денари, за три години.

Непозната величина е каматната стапка p, која може да се пресмета согласно пропорцијата според формулата:

$$\boxed{p = \frac{100i}{Kt}}.$$

Во конкретниот случај

$$p = \frac{100 \cdot 8700}{58000 \cdot 3} = 5\% . \blacklozenge$$

Во досегашните примери, времето за кое се пресметуваше каматата беше изразено во години, но најчесто периодот на вкаматување не е зададен со цел број години. Во тој случај, најлесно е деновите или месеците да се изразат како дел од годината, за да може да се користат претходно изведените врски меѓу величините во простата каматна сметка. Така, месецот претставува $\frac{1}{12}$ од годината, а денот $\frac{1}{360}$

или $\frac{1}{365}$ од годината. Ако времето е зададено во месеци, за пресметаната камата важи

$$\boxed{i = \frac{Kp}{100} \cdot \frac{t}{12}},$$

имајќи предвид дека t-месеци претставуваат $\frac{t}{12}$ од годината.

Основна пропорција за време дадено во месеци гласи:

$$\boxed{K : i = 1200 : pt}.$$

Доколку времето е зададено во денови, ја користиме формулата:

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{36000}}$$

или

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{36500}},$$

зависно од договорот дали годината ја сметаме календарски со 365 денови (пишуваме $(k,365)$) или со временска матрица $(30,360)$ односно 12 месеци по 30 дена. Имено, времето t зададено во денови, претставува $\frac{t}{365}$, односно $\frac{t}{360}$ делови од годината. Соодветните основни пропорции за пресметување на останатите величини се

$$\boxed{K : i = 36500 : pt}$$

или

$$\boxed{K : i = 36000 : pt}.$$

Забелешка. Се користи и ознака $(k,360)$, кога деновите се бројат календарски, а годината со 360 денови.

5. Колкава камата ќе биде исплатена за основен капитал од 240000 денари за 8 месеци, со каматна стапка од 6% ?

Од зададените услови во задачата имаме $K = 240000$, $t = 8$ месеци, $p = 6\%$. Тогаш

$$i = \frac{Kpt}{1200} = \frac{240000 \cdot 6 \cdot 8}{1200} = 9600 \text{ денари.}$$

6. Со која каматна стапка, основен капитал од 1620000 денари, ќе донесе камата од 21304 денари за период од 60 дена? Времето го мериме календарски.

Познатите величини се: $K = 1620000$, $i = 21304$ и $t = 60$ дена. Тогаш $i = \frac{Kpt}{36500}$, односно

$$p = \frac{36500 \cdot i}{Kt} = \frac{36500 \cdot 21304}{1620000 \cdot 60} = 8\% .\blacklozenge$$

7. Колкава е вложената сума во банка на период од 23 мај до 16 септември оваа година, ако пресметаната камата е 4576 денари, со каматна стапка од 4%? Времето го мериме календарски $(k,365)$.

Прво треба да се пребројат деновите и тоа, доколку го броиме првиот ден од периодот не го земаме предвид последниот, односно ако не го пресметуваме првиот, тогаш го пресметуваме последниот ден од периодот. Во секој случај, не се бројат и првиот и последниот ден.

Во нашиот случај, ќе сметаме дека прв ден за вкаматување е 24 мај, а тогаш имаме вкупно 8 дена од месец мај, 30 дена од јуни, па 31 дена од јули и август, а бидејќи го броиме последниот ден имаме 16 дена од месец септември, односно вкупно $t = 8 + 30 + 31 + 31 + 16 = 116$ дена. Согласно формулата, за непознатата величина K важи:

$$K = \frac{36500 \cdot i}{pt} = \frac{36500 \cdot 4576}{4 \cdot 116} = 360000 \text{ денари.}$$

Значи, вложена е сума од 360000 денари на 23 мај. ♦

8. Победникот на турнирот во пинг-понг, ја вложил освоената сума од 125000 денари, во две различни банки. Првата банка пресметува камата со 7%, а втората со 5%. По една година, пресметаната камата од двете банки е вкупно 7850 денари. Колкави износи се вложени во двете банки поединечно?

Позната е вложената сума $K = 125000$, која е збир на два поединечни влога $K_1 = x$ и $K_2 = 125000 - x$. Каматните стапки се $p_1 = 7\%$, $p_2 = 5\%$, со вкупна камата $i = i_1 + i_2 = 7850$. Тогаш според условите, можеме да поставиме равенка:

$$i = \frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100},$$

каде што $t_1 = t_2 = 1$ година. Оттука,

$$7850 = \frac{7x}{100} + \frac{5(125000 - x)}{100},$$

односно

$$785000 = 5 \cdot 125000 + 2x,$$

од каде што следува $K_1 = x = 80000$ денари и $K_2 = 45000$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Колкава камата се пресметува на 25000 денари со каматна стапка 15% за време од:

а) 5 години; б) 3 месеци; в) 25 дена по $(30,360)$ и $(k,365)$.

2. Колку години треба да биде вложена сума K, за да со годишна проста каматна стапка од 5%, пресметаната камата изнесува колку и вложената сума? (Забелешка. $K = I_p$)

3. Пресметај ја каматната стапка со која за долг од 34500 денари, пресметана е камата од 6900 денари, за 4 години?

4. За која вложена сума се пресметува камата од 3540 денари, при каматна стапка од 6% за:

а) 4 години; б) 8 месеци.

5*. Во банка се вложени две различни основни суми кои се разликуваат за 12000 денари. Поголемата сума е вложена на една година, со 4% каматна стапка, а помалата сума на 10 месеци, со 6% каматна стапка. Пресметај ја вкупната вложена сума, доколку пресметаните камати, за двете суми поединечно се еднакви.

6*. Пресметај колкава вкупна камата, со каматна стапка од $6{,}5\%$, ќе донесат следниве суми: 38000 денари вложени на период $31.01-30.06$, 72600 денари вложени на период $8.03-30.06$ и 18900 денари вложени на период $1.05-30.06$, во истата календарска година?

1. 2. Каматна сметка над сто и под сто

Често, кога се зборува за долговите и пресметаните камати, како и вложувањето и штедните камати, не се разгледуваат поединечните величини од пропорциите за проста каматна сметка, туку од практичен аспект се зборува за основната сума зголемена за пресметаната камата или пак сумата намалена за пресметаната камата.

Доколку е позната основната сума зголемена за каматата $K+i$ тогаш, зборуваме за **проста каматна сметка над сто**, а ја применуваме за одредување на K и i. Доколку пак, користејќи ја основната сума намалена за пресметаната камата, $K-i$, ги одредуваме K и i, зборуваме за **проста каматна сметка под сто**. И овде, при пресметувањето временскиот период на вкаматување може да е зададен во години, месеци или денови.

Основната пропорција за простата каматна сметка е зададена со $K:i=100:pt$. Изразувајќи ја пресметаната камата $i=\frac{Kpt}{100}$ и додавајќи ја на основната сума, за акумулираната сума добиваме:

$$K+i=K+\frac{Kpt}{100}=K\left(1+\frac{pt}{100}\right).$$

Тогаш,

$$\frac{K+i}{K}=1+\frac{pt}{100}=\frac{100+pt}{100},$$

од каде што може да запишеме нова пропорција во облик:

$$\boxed{(K+i):(100+pt)=K:100} \qquad (1)$$

Исто така, ако основната пропорција ја преуредиме во облик $K:100=i:pt$, тогаш добиваме уште една пропорција која ја поврзува акумулираната сума со другите величини во простата каматна сметка

$$\boxed{(K+i):(100+pt)=i:pt}. \qquad (2)$$

Ако на сличен начин ја побараме намалената сума $K-i$, добиваме:

$$K-i=K-\frac{Kpt}{100}=K\left(1-\frac{pt}{100}\right)=K\frac{100-pt}{100}.$$

Оттука, може да ја запишеме пропорцијата:

$$\boxed{(K-i):(100-pt)=K:100} \qquad (3)$$

и повторно со замена на односот $K:100$ од основната пропорција, добиваме:

$$\boxed{(K-i):(100-pt)=i:pt}. \qquad (4)$$

Заради сличноста на пропорциите, може да се поврзат во облик:

$$\boxed{(K\pm i):(100\pm pt)=K:100}$$

и

$$\boxed{(K\pm i):(100\pm pt)=i:pt}.$$

Истите овие пропорции, може да се изведат и со примена на познати својства за размер од збирот или разликата на левите членови на размерот и збирот или разликата на десните членови, кој е еднаков на размерот на првите членови на левиот и десниот размер, а воедно е еднаков и на размерот на вторите членови на левиот и десниот размер од истата пропорција.

Од новоизведените пропорции, може да се изведат формули за пресметување на основната сума и каматата во сметките над и под сто

$$\boxed{K=\frac{(K\pm i)\cdot 100}{100\pm pt}} \text{ и } \boxed{i=\frac{(K\pm i)\cdot pt}{100\pm pt}}.$$

1. Должник на доверителот му враќа долг од 57120 денари, износ во кој е вклучена и пресметаната камата со каматна стапка 6%, за период од две години. Колкав е долгот, а колкава каматата?

Познат е износот $K+i=57120$ денари. Тогаш основната сума согласно формулата е $K=\dfrac{(K+i)\cdot 100}{100+pt}$, каде $p=6\%$, $t=2$. Основната сума изнесува

$$K=\frac{57120\cdot 100}{100+6\cdot 2}=\frac{5712000}{112}=51000 \text{ денари.}$$

Значи, главницата на долгот е 51000 денари, а на камата отпаѓаат $57120-51000=6120$ денари. ♦

2. По одбивањето на 8% камата за 6 месеци, банката наплатила 52800 денари. Колкав е долгот, а колкава каматата?

Имајќи предвид дека каматата i е одбиена на почеток, тоа значи дека основната сума е веќе намалена за каматата, па должникот треба да врати уште $K-i$ денари на банката, колку што подигнал. Тогаш $K-i=52800$ денари, $t=6$ месеци, $p=8\%$. Постојат два начини да се пресмета основната сума, да се пресмета времето во години, односно $t=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, или пак да се изведат соодветни формули за сметката под сто и над сто, во случаите кога времето се пресметува во месеци или денови. Директно, од познатата формула добиваме

$$K=\frac{(K-i)\cdot 100}{100-pt}=\frac{52800\cdot 100}{100-8\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5280000}{96}=55000 \text{ денари},$$

а каматата

$$i=\frac{(K-i)\cdot pt}{100-pt}=\frac{52800\cdot 8\cdot\frac{1}{2}}{100-8\cdot\frac{1}{2}}=\frac{211200}{96}=2200 \text{ денари}$$

(или $i=K-(K-i)=55000-52800=2200$ денари). ♦

Доколку користиме готови пропорции за пресметување, кога времето е зададено во месеци, од $K:i=1200:pt$ добиваме:

$$\boxed{(K\pm i):(1200\pm pt)=K:1200}$$

и

$$\boxed{(K\pm i):(1200\pm pt)=i:pt}.$$

Од $K:i=36500:pt$ или $K:i=36000:pt$, користејќи ги својствата на пропорциите добиваме:

$$\boxed{(K\pm i):(36500\pm pt)=K:36500}$$

$$\boxed{(K\pm i):(36500\pm pt)=i:pt}$$

и соодветно

$$\boxed{(K\pm i):(36000\pm pt)=K:36000}$$

$$\boxed{(K\pm i):(36000\pm pt)=i:pt},$$

за случаите кога користиме временски матрици $(k,365)$ и $(30,360)$, за период на вкаматување изразен во денови.

3. Лице подигнало кредит и по 9 месеци, заедно со 11% камата, вратило 541250 денари. Колку изнесува кредитот, а колку пресметаната камата?

Користејќи ја пропорцијата за акумулираната сума $K+i$, кога времето е изразено во месеци, $(K+i):(1200+pt)=K:1200$, за основната сума добиваме

$$K=\frac{(K+i)\cdot 1200}{1200+pt}=\frac{541250\cdot 1200}{1200+11\cdot 9}=500000 \text{ денари,}$$

а за пресметаната камата важи

$$i=(K+i)-K=541250-500000=41250 \text{ денари. } \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Објасни што е каматна сметка над сто, а што каматна сметка под сто.

2. По одбивањето на 30% камата за 200 дена, за колку треба да се врати заемот, ако должникот добил 60000. Колку изнесува каматата, а колку вкупно средства треба да се вратат? Користи временска матрица $(30,360)$.

3. Лице склучило договор за тримесечен кредит, со 20% каматна стапка, при што банката ја задржала каматата и исплатила 33440 денари. На колкава сума е склучен договорот за кредит и колкава е пресметаната камата? Користи временска матрица $(30,360)$.

4. На лице треба да му се исплатат 35000, односно 50000 денари, за 3, односно за 5 години. Каматната стапка е 5% годишно. Колкав вкупен износ треба да се вложи за да по вкаматувањето се добијат потребните суми?

5*. Заедно со $3{,}2\%$ камата за периодот $10.08-30.09$, $(30,360)$, должникот вратил 33900 денари. Да се пресмета долгот и каматата.

6. Заедно со $12{,}5\%$ камата, за две години, должникот вратил 325500 денари. Колкав е долгот, а колкава пресметаната камата?

7. По одбивање на 9% камата за време од 25.01 до 31.08, примени се 10000 денари. Колкав е долгот, а колкава пресметаната камата, ако временската матрица е $(K,365)$?

1. 3. Терминска сметка

Кога должникот има повеќе суми за враќање, со различни износи, со различни рокови за плаќање и различни каматни стапки, се поставува прашањето дали е можно и како да се исплатат долговите наеднаш, а ниту една страна, ниту доверителот ниту должникот, да не бидат оштетени. Прашањето може да се разгледува од аспект на тоа кој е средниот рок на враќање на долговите, која би била средната каматна стапка, колкав е должничкиот износ во моментот кога се враќа долгот. Во принцип тоа значи дека збирот на каматата на поединечните делови треба да е еднаков на каматата пресметана за вкупниот долг за средно време, со средна каматна стапка. Постапката на утврдување на средниот рок и средната стапка, се нарекува **терминска сметка** и претставува една примена на простата каматна стапка. **Среден рок** се нарекува времето за кое може да се исплатат наеднаш повеќе долговни суми, наместо истите суми да се исплаќаат во различни рокови. **Рок на салдо на долгот** е рок во кој може да се исплати разликата помеѓу долгот и побарувањата, во ситуација во која покрај тоа што има долг, лицето е и доверител за некои други должници.

1.3.1. Пресметување на среден рок

Нека обврските на должникот се долгови со износи K_1, K_2, ..., K_n, со каматни стапки p_1, p_2, ..., p_n, соодветно, при што долговите доспеваат за временски периоди t_1, t_2, ..., t_n.

Во формулите, времето t_k, $k=1,2,...,n$, може да биде во кои било мерни единици, но банките најчесто ги изразуваат во денови.

Должникот сака да ги подмири сите долгови наеднаш, во среден рок t_s и со средна каматна стапка p_s. За поедноставни пресметки, нека времето е зададено во години. Вкупните обврски на должникот на име на камати се:

$$\frac{K_1p_1t_1}{100}+\frac{K_2p_2t_2}{100}+...+\frac{K_np_nt_n}{100}.$$

Овој износ треба да е еднаков на сумата на каматите пресметани за поединечните долгови, но со средна каматна стапка, во среден рок на исплата на долгот.

$$\frac{K_1p_st_s}{100}+\frac{K_2p_st_s}{100}+...+\frac{K_np_st_s}{100}.$$

Во оваа ситуација нема оштетени, основните суми на долговите се еднакви, но и пресметаните камати збирно (акумулативно), исто така се еднакви.

Значи,

$$\frac{K_1p_1t_1}{100}+\frac{K_2p_2t_2}{100}+...+\frac{K_np_nt_n}{100}=\frac{K_1p_st_s}{100}+\frac{K_2p_st_s}{100}+...+\frac{K_np_st_s}{100},$$

односно

$$K_1p_1t_1+K_2p_2t_2+...+K_np_nt_n=p_st_s(K_1+K_2+...+K_n).$$

Оттука, доколку знаеме со која средна каматна стапка ќе вкаматуваме, може да го пресметаме средниот рок за враќање на долгот, односно го добиваме времето за враќање на вкупниот долг,

$$\boxed{t_s=\frac{K_1p_1t_1+K_2p_2t_2+...+K_np_nt_n}{p_s(K_1+K_2+...+K_n)}}.$$

Средната каматна стапка, се пресметува кога сумите, стапките и времето се различни

$$\boxed{p_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{t_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}}.$$

Да ја разгледаме пресметаната камата за поединечните долгови и вкупниот долг, на еден ист временски период. За таа цел, во претходната формула ставаме

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t_s$$

и добиваме:

$$\boxed{p_s = \frac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}}.$$

Ќе ја замениме пресметаната средна каматна стапка во формулата за средниот рок и добиваме:

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{\frac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)},$$

односно

$$\boxed{t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}}.$$

Често пати, некои од величините во пресметките се еднакви. Така:

- ако се еднакви основните суми $K_1 = K_2 = \ldots = K_n = K$, за средниот рок и средната каматна стапка добиваме:

$$t_s = \frac{K\left(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n\right)}{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)} = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

и

$$p_s = \frac{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)}{nK} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n};$$

- ако се еднакви каматните стапки $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, за средниот рок добиваме

$$t_s = \frac{p\left(K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n\right)}{p\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)} = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n},$$

а за средната каматна стапка имаме $p_s = p$;

- ако се еднакви и основните суми и каматните стапки, тогаш $p_s = p$ и

$$t_s = \frac{K\left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n\right)}{nK} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}.$$

Рокот на плаќање (датумот на плаќање), најчесто се определува со додавање на пресметаниот среден рок на првото време на доспевање. Тогаш и пресметувањето на времињата на доспевање на поединечните долгови се врши споредено со првото време на доспевање.

Ако равенката за изедначување на збирот на одделните камати и каматата пресметана за средниот рок, ја запишеме во случај кога времето е зададено во денови, добиваме:

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500}+\frac{K_2 p_2 t_2}{36500}+...+\frac{K_n p_n t_n}{36500}=\frac{K_1 p_s t_s}{36500}+\frac{K_2 p_s t_s}{36500}+...+\frac{K_n p_s t_s}{36500},$$

односно повторно се добива равенството:

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n = p_s t_s (K_1 + K_2 + ... + K_n).$$

Ова покажува дека пресметувањата се вршат според истите формули, независно како го мериме времето, во години, месеци или денови, но секако сите времиња на доспевање теба да се изразени во иста мерна единица.

1. Должник треба да плати 30000 денари во четири еднакви рати и тоа првата исплата по 30 денови, втората по 60 денови, третата по 90 денови и последната рата по 120 денови, од сега. За колку денови може да се исплати целиот долг наеднаш, ако каматната стапка е 8%?

Бидејќи исплатата е во еднакви рати, сумите K_1, K_2, K_3 и K_4 се еднакви, каматната стапка е еднаква за сите исплати $p=8\%$, а за времето за исплата поединечно важи $t_1=30$, $t_2=60$, $t_3=90$ и $t_4=120$. Го пресметуваме средниот рок за овој специјален случај

$$t_s=\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}=\frac{30+60+90+120}{4}=75 \text{ дена.}$$

Ова значи дека долгот од 30000 денари може да се врати целосно за 75 дена од сега, со камата 8%.♦

Датумот на плаќање во однос на кој се брои времето за пресметките во терминската сметка, се нарекува **епоха**. За епоха не мора да се избере првото време на доспевање. Ќе разгледаме пример во кој пресметките се вршат во однос на две различни епохи.

2. Должник треба да го исплати својот долг од 60000 денари, со каматна стапка од 16% во четири еднакви рати и тоа: првата на 15.02, втората на 7.03, третата на 5.04 и четвртата на 1.05, истата година. На кој датум должникот може да го исплати целиот долг, ако:

а) епохата е 15.02;   б) епохата е 7.03?

Во случајот кога времето почнуваме да го мериме од 15.02 (случајот под а)), времето за доспевање на првата рата е $t_1=0$. За втората рата, времето на доспевање е периодот од 15.02 до 7.03 (не броејќи го 15.02, но вклучувајќи го 7.03) е $t_2=20$ дена. Соодветно, $t_3=49$ (13 дена од февруари, 31 ден од март и 5 дена од април) и $t_4=75$ (од 15.02 до 1.05). Со оглед на тоа дека основните суми и каматната стапка се еднакви, за средниот рок добиваме:

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{0 + 20 + 49 + 75}{4} = 36 \text{ дена.}$$

Датумот на доспевање на исплатата на целиот долг е 36 дена од денот кога започнува броењето, односно од 15.02, а тоа е 23.03.

Доколку за епоха го избереме денот 7.03 (случајот под б)), тогаш првото доспевање го броиме station наназад од 7.03 до 15.02, односно сега $t_2 = 0$ а $t_1 = -20$. Натаму, $t_3 = 29$ (од 7.03 до 5.04) и $t_3 = 55$ (од 7.03 до 1.05). Средниот рок е:

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{-20 + 0 + 29 + 55}{4} = 16 \text{ дена,}$$

што не доведува до датумот 23.03.♦

Ова покажува дека без разлика на избраната епоха и различните средни рокови, датумот за исплата на долгот е истиот.

3. Трговско друштво треба да плати 100000 денари на четири еднакви рати и тоа:

- првата рата за 100 дена од сега со камата 3%;
- втората рата за 150 дена, со камата 4%;
- третите 25000 денари, за 200 дена, со камата 6%;
- четвртата рата за 300 дена, со камата 7%.

По колку дена и со која средна каматна стапка, може да се исплатат сите четири долгови наеднаш, а да нема оштетени страни?

Задачата наједноставно ќе ја решиме кога ќе ги распоредиме вредностите во табела, во која воедно и сумирањето е поедноставно.

	K_i - суми	t_i - дена	p_i - стапки	$p_i \cdot t_i$
1	25000	100	3	300
2	25000	150	4	600
3	25000	200	6	1200
4	25000	300	7	2100
Збир	100000		20	4200

Средната стапка е $p_s = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} = \frac{3 + 4 + 6 + 7}{4} = 15\%$ и

$$t_s = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 + p_4 t_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{300 + 600 + 1200 + 2100}{20} = \frac{4200}{20} = 210 \text{ дена.}$$

Вкупниот долг од 100000 денари треба да се врати за точно 210 дена, со камата 5%, односно за 210 дена трговското друштво треба да врати

$$100000+\frac{100000\cdot 5\cdot 210}{36000}=102917 \text{ денари. } \blacklozenge$$

4. Трговец, од истата банка, зел три кредити, но сите под различни услови. Неговиот долг се состои во враќање на

- 20000 денари на 7.05 со 4% камата;
- 40000 денари на 6.06 со 5% камата;
- 50000 денари на 5.08 со 6% камата.

На кој датум и со која средна каматна стапка, трговецот може да ги врати сите три суми наеднаш, без да биде оштетен?

Ако за почетен датум го избереме 7.05, тогаш $t_1=0$, $t_2=30$ дена (од 7.05 до 6.06), $t_3=90$ дена (од 7.05 до 5.08). Во табела ги внесуваме податоците и производите кои се јавуваат во формулите за пресметување на средниот рок.

	K_i - суми	t_i - дена	p_i - стапки	$K_i p_i$	$K_i p_i t_i$
1	20000	0	4	80000	
2	40000	30	5	200000	6000000
3	50000	90	6	300000	27000000
Збир	110000			580000	33000000

Имаме $p_s=\frac{K_1p_1+K_2p_2+K_3p_3}{K_1+K_2+.K_3}=\frac{580000}{110000}=5{,}27\%$ и

$$t_s=\frac{K_1p_1t_1+K_2p_2t_2+K_3p_3t_3}{K_1p_1+K_2p_2+K_3p_3}=\frac{33000000}{580000}\approx 57 \text{ дена.}$$

Вкупниот долг може наеднаш да се врати со камата $5{,}27\%$ за 57 дена, поточно на 3.07. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Што е терминска сметка?

2. Кое време се нарекува среден рок?

3. Кој рок се нарекува рок на салдо на долгот?

4. Претпријатие должи неколку сметки за електрична енергија, па склучило договор за плаќање на пет еднакви рати по 80000 денари, со каматна стапка 9% и тоа: прва рата по 30 денови, втора по 50 денови, трета рата по 80 денови, четврта по 100 денови и последната петта рата по 115 денови. Во кој интервал може да се исплати целиот долг наеднаш?

5. Должник треба да плати 300000 денари, и тоа 25% веднаш, 10% по два месеци, 35% по седум месеци и останатите 30% по десет месеци. По колку време може да се платат сите суми наеднаш?

6. Долг од 1800000 денари треба да се врати во четири еднакви рати со 20% каматна стапка и тоа:

- прва рата на 15.03;
- втора рата на 21.04;
- трета рата на 10.05;
- четврта рата на 30.06.

На која дата целиот долг може да се исплати наеднаш, ако стартната дата е:

а) 15.03; б) 21.04.

7. Трговец на својот добавувач треба да му исплати три достави на стока, и тоа:

- 60000 денари со 6% на 3.04;
- 80000 денари со 6% на 24.04;
- 100000 денари со 6% на 26.05.

На кој датум трговецот треба да ги исплати набавките за да ниту добавувачот, ниту трговецот на се оштетени?

8. Должник треба да плати 80000 денари на 3.03, 30000 на 8.04, 60000 денари на 18.05, 30000 денари на 23.07, сите со 10% каматна стапка. На кој датум може да се исплати целиот долг?

9. Трговец треба да ги исплати профактурите од својот набавувач и тоа на износи од по 45000 денари, со каматна стапка 6% на 10.04, 28.04, 20.05 и 30.05. На кој ден трговецот може наеднаш да го исплати долгот?

1. 4. Пресметување на рок на салдо на долгот

Во овој дел ќе дадеме одговор на прашањето кога должникот може да ги регулира сите свои обврски, ако истовремено и должи и побарува. Таквиот временски рок се нарекува рок на салдо на долгот.

Нека $K_1, K_2, ..., K_n$ се обврските на должникот по $t_1, t_2, ..., t_n$ денови, со каматни стапки $p_1, p_2, ..., p_n$. Нека неговите побарувања се $P_1, P_2, ..., P_m$, со рокови по $t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0$ денови, со каматни стапки $p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0$. Идејата е да се утврди рокот на салдото t_s, каматната стапка (средна) p_s и салдото на долгот S, ако знаеме дека збирот на каматите на долгот е еднаков на збирот на каматите на побарувањата и каматата на салдото. Притоа, под претпоставка дека долговите се поголеми од побарувањата, $K_1 + K_2 + ... + K_n > P_1 + P_2 + ... + P_m$, салдото на долгот S е сумата која треба да се доплати за да се покрие долгот, односно

$$\boxed{S = (K_1 + K_2 + ... + K_n) - (P_1 + P_2 + ... + P_m)}.$$

Вкупната камата за долговите изнесува

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + ... + \frac{K_n p_n t_n}{36500}.$$

Вкупната камата за побарувањата е

$$\frac{P_1 p_1{}^0 t_1{}^0}{36500} + \frac{P_2 p_2{}^0 t_2{}^0}{36500} + ... + \frac{P_m p_m{}^0 t_m{}^0}{36500},$$

а пресметаната камата за салдото на долгот е $\frac{S p_s t_s}{36500}$.

Тогаш,

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + ... + \frac{K_n p_n t_n}{36500} = \frac{P_1 p_1{}^0 t_1{}^0}{36500} + \frac{P_2 p_2{}^0 t_2{}^0}{36500} + ... + \frac{P_m p_m{}^0 t_m{}^0}{36500} + \frac{S p_s t_s}{36500}.$$

Без разлика во која мерна единица е изразено времето, равенството од кое ќе го одредиме рокот на салдото на долгот е

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n = P_1 p_1{}^0 t_1{}^0 + P_2 p_2{}^0 t_2{}^0 + ... + P_m p_m{}^0 t_m{}^0 + S p_s t_s,$$

односно

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n - \left(P_1 p_1{}^0 t_1{}^0 + P_2 p_2{}^0 t_2{}^0 + ... + P_m p_m{}^0 t_m{}^0\right)}{S p_s}.$$

Специјално, доколку каматните стапки се еднакви и за долговите и за побарувањата, $p_1 = ... = p_n = p_1{}^0 = ... = p_m{}^0 = p_s$, добиваме

$$t_s = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + ... + K_n t_n - \left(P_1 t_1{}^0 + P_2 t_2{}^0 + ... + P_m t_m{}^0\right)}{S}.$$

1. Фирмата Поларино должи 5000 денари за 40 денови, 6000 денари за 50 денови, 8000 денари за 80 денови, а побарува 3000 денари за 30 денови и 10000 денари за 90 денови. По колку денови може да се плати остатокот од долгот? Каматната стапка е еднаква на целиот период.

Ќе ги внесеме податоците во табела, слично како при определување на средниот рок на исплата, но и за долговите и за побарувањата:

Долг				Побарување			
	K_i	t_i	$K_i t_i$		P_j	$t_j{}^0$	$P_j t_j{}^0$
1	5000	40	200000	1	3000	30	90000
2	6000	50	300000	2	10000	90	900000
3	8000	80	640000				
Збир	19000		1140000		13000		990000

Салдото на долгот е

$$S = (K_1 + K_2 + K_3) - (P_1 + P_2) = 19000 - 13000 = 6000 \text{ денари.}$$

Рокот на салдото е

$$t_s = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + K_3 t_3 - \left(P_1 t_1{}^0 + P_2 t_2{}^0\right)}{S} = \frac{1140000 - 990000}{6000} = 25 \text{ денови.}$$

Целосна исплата на долгот треба да се направи со доплата на 6000 денари, вкаматени за истата каматна стапка, за 25 денови од сега. ♦

Забелешка. До сега претпоставувавме дека долгот е поголем од побарувањата. Но, може да се случи и долгот да е помал од побарувањата, ситуација во која салдото на долгот, при наведените равенства, ќе добие негативен знак, што ќе значи дека ќе му останат на должникот со пресметаната камата.

Задачи за самостојна работа

1. Која е идејата за воведување на поимот рок на салдо на долгот?

2. Претпријатие должи 75000 денари за три месеци, 40000 денари за шест месеци и 80000 денари за осум месеци. Во исто време побарува 55000 денари за седум месеци и 30000 денари за девет месеци. Во кој рок може да се плати целиот долг?

3. Претпријатие должи 80000 денари на 5.04, 150000 денари на 20.05, 275000 денари на 30.06, а побарува 130000 денари на 17.03 и 90000 денари на 5.08. На која дата може да се плати салдото на долгот, ако епохата е 5.04?

4. Должник треба да врати 1000 денари на 4.03, 2000 денари на 25.04 и 3000 денари на 15.05. Во исто време побарува на 1500 денари на 17.04 и 1000 денари на 1.09. На кој датум може да се плати салдото на долгот и колку изнесува вкупниот износ кој должникот ќе го уплати на доверителот?

а) епоха 4.03; б) епоха 17.02.

5. Трговец треба да исплати долгови кон својот добавувач и тоа по 45000 денари, со каматна стапка 6%, на 10.04, 28.04, 20.05 и 30.05. Во исто време побарува по 30000 денари на 15.04 и 25.05. На кој ден може да се исплати салдото на долгот?

1. 5. Поим за дисконтна сметка и дисконтни пресметувања

Во условите на стопанисување се појавуваат случаи кога одреден износ на пари, генериран врз основа на одредени финансиски инструменти (обврзници, чекови, меници и сл.) за детерминиран временски период, се исплаќаат предвремено (пред рокот на доспевање на инструментот). Карактеристично за овој вид на случаи е пресметката на делот на каматата, за кој треба да се намали крајната сума која се должи, познат како дисконт. Имено, при предвремена исплата на дадено номинално задолжување, кое треба да се плати на определен датум во иднина, сумата за која се намалува номиналното задолжување во моментот пред рокот на доспевање на долгот, се нарекува **дисконт**.

Постапката на конверзија на едно задолжување кое треба да се плати на определена дата во задолжување кое предвремено се плаќа на одредена дата (детерминирање на сегашната вредност на идните готовински текови) се нарекува дисконтирање (есконтирање).

При реализирањето на дисконтните пресметувања се користат следниве параметри:

N=	номинална вредност на која гласи финансискиот инструмент.
t,n,n=	дисконтен (есконтен) рок, кој е еднаков на времето изразено во број на денови - t, месеци - m, години - n, од денот на дисконтирање на инструментот, до денот на доспевање на инструментите. Деновите на месеците се сметаат календарски, така што не се пресметува денот кога е поднесен инструментот на есконт, а се пресметува денот на доспевање на инструментот.
D =	дисконт (есконт), кој е еднаков на сумата за која се намалува номиналната вредност на финансискиот инструмент.
p =	каматна стапка (дисконтна стапка) по која е пресметан дисконтот.
E =	реална (ефективна) сума со која се отплаќа номиналното задолжение во моментот на предвремено плаќање.

Бидејќи, пресметувањето на дисконтот, се врши на два начина, постојат два вида на дисконти:

- комерцијален (банкарски, трговски) дисконт - *Dk,* кај кој за основа на пресметувањето на дисконтот се зема номиналната вредност, а ефективната вредност се добива како разлика на номиналната вредност и дисконтот и

- рационален (математички) дисконт - *Dr*, кај кој номиналната вредност се добива како збир на ефективната вредност и соодветната камата, која се пресметува за ефективната вредност.

При дисконтирањето, банката врз основа на номиналната вредност пресметува определена провизија и дополнително наплатува и манипулативни трошоци (провизијата и манипулативните трошоци се одземаат од пресметаната ефективна вредност).

1.5.1. Карактеристики на меница

Меницата (bill of exchange) е писмена исправа издадена во пропишана форма во која едно лице му издава налог на друго лице во определено време и на определено место да му ја исплати означената сума пари во меницата на лицето означено на самата меница кому му е даден тој налог. Имено, меницата претставува хартија од вредност по наредба и нејзиниот емитент (трасант) дава безусловна наредба на друго лице (трасат), да се исплати одреден паричен износ на корисникот на исправата (ремитент), кој е наведен на меницата или на самиот трасант:

- трасант (drawer) е налогодавач или издавач на меница кој се назначува на лицето на меницата (емитенти на меницата се банки и патнички агенции кои издаваат одделни видови меници);
- трасат (drawee) е оној кој врши исплата по меницата од трасантовото покритие што се наоѓа кај него;
- ремитент (payee) е физичко или правно лице назначено во исправата на кое му се исплатува износот наведен во меницата, односно корисник на меницата и
- имател на меницата е лице кое ја поседува меницата на законит начин.

Меницата како хартија од вредност ги има следниве улоги:

- меницата е средство за кредит (или средство за обезбедување);
- меницата е средство за плаќање и
- меницата е средство за есконт.

Во зависност од карактеристиките и улогата, постојат повеќе видови меници: трасирана меница, сопствена меница, бланко меница, стоковна меница, деловна меница, цилкуларна меница, трасирана - влечена меница, сопствена - влечена меница, комисиона меница и кредитна меница.

Основни видови на меници се трасираната и сопствената меница. Бидејќи меницата е формално - правна работа и се составува во пропишана писмена форма која содржи извесен број на елементи кои се карактеристични за **трасираната меница**. Според Законот за меница и соодветните Женевски конвенции од 1930 година, трасираната меница треба да ги содржи следниве суштествени елементи:

- ознака дека е меница, отпечатена на самиот меничен слог, на македонски јазик, со кирилско писмо;
- трансат (емитенот на меницата);
- име, односно назив и седиште на трасатот;
- име на ремитент (корисник на правото од меницата);
- безусловна наредба да се плати одредена сума пари од покритието на трасантот;
- време на пристигнувањето;
- место каде што треба да се изврши плакањето;
- ден и место на издавање и
- потпис на трасантот.

Сопствената меница претставува безусловно ветување преземено од трасантот како трасат дека ќе се исплати одреден паричен износ на ремитентот кој е наведен на меницата. Сопствената меница ги содржи следниве елементи:

- ознака дека меницата е отпечатена на самиот меничен слог, на македонски јазик со кирилско писмо;
- безусловно ветување дека одредена сума на пари ќе се плати;
- време на пристигнувањето;
- место каде што треба да се изврши плаќањето;
- име на ремитентот;
- ден и место на издавање и
- потпис на трасантот.

Менични работи се правни дејствија и работи кои можат да се вршат со меницата: издавање на меница, индосирање на меница, акцептирање на меница, цесија на меница, авалирање на меница, откупување на меница, амортизација, отповикување, протест на меница и др.

Карактеристични менични начела што наоѓаат примена во менично правните работи се: писменост, инкорпорација, фиксност на меничната обврска, менична строгост, менична солидарност, менична самостојност и менична непосреденост.

Начелото на писменост (формалност) доаѓа до израз поради тоа што меницата е строго формална исправа. Меницата мора да се издаде во писмена, со закон пропишана форма, заради полесно докажување на постоењето на менично - правните односи, како и заради непречено одвивање на менично - правниот промет. Во писмената исправа на меницата треба да бидат содржани сите суштествени елементи и менично - правни дејства, како, на пример, изјавата за акцептирање, авалирање, индосирање и друго. Потребно е да се потенцира дека во поново време начелото на формалност стана поеластично во правниот промет, како и во поновите прописи за менично право, во контекст на усвојувањето на т.н. теорија на пропуштање (омисија), односно издавање на бланко меница.

Начелото за инкорпорација се состои во тоа што правата и обврските од меницата се тесно поврзани со поседувањето на меничната исправа. Ниедно лице не може да ги оствари правата од меницата доколку не ја има и самата меница. Начелото на инкорпорација истовремено содржи две права (право од меница и право на меница):

- право од меница - според својот карактер е облигационо право и се состои во тоа што имателот на меницата е овластен да бара од меничниот должник извршување на определена менична обврска и

- право на меница - според својот карактер е вистинско право кое се изразува преку тоа што постои претпоставка дека имателот на меницата е нејзин законски сопственик и има право да бара извршување на обврската од меничниот должник само додека меничната исправа е во негова сопственост.

Според **начелото на фиксна менична обврска**, може да се побарува или да се должи врз основа на меница, што недвосмислено се гледа од самото менично писмено. Меничната обврска се проценува врз основа на она што е наведено во меницата, а не врз основа на други доказни средства. Во менична обврска се стапува тогаш кога на меничното писмено ќе се стави потпис и се впишат меничните изјави.

Со **начелото на менична строгост** се обезбедува брз и непречен менично - правен промет и лесно докажување на меничните обврски. Меницата спаѓа во инструменти кои најмногу ги обезбедуваат доверителите и претставува строга исправа во однос спрема доверителите во таа смисла тој мора да ги оствари своите права од меницата според определените прецизни правни правила, што му овозможува на должникот сигурна положба.

Начело на менична солидарност се состои во тоа што сите лица што ја потпишале меницата (трасантот - емитентот, акцептантот, авалистот и индосант) солидарно му одговараат на имателот на меницата за нејзино исплатување, без разлика на нивните меѓусебни односи.

Начело на менична непосреденост се состои во тоа што секој од меничните должници (потписници на меницата) му одговара непосредно на меничниот доверител. Поради тоа, доверителот е овластен непосредно да му се обрати на секој должник и од него да бара исплата на меничната сума, без разлика на рангот што го има меничниот должник во меницата.

Начелото на менична самостојност се состои во тоа што секој меничен должник, со ставање на свој исправен потпис на меничното писмено, создава самостојна менична обврска, независно од обврските на одделните потписници на меницата.

1.5.2. Дисконтирање (есконтирање) на меницата

Износот, означен на меницата претставува номинална вредност на меницата или менична сума. Меницата може да се исплати:

- на денот на доспевање на меницата;
- по рокот на доспевање, кога покрај номиналната вредност се плаќа и соодветна камата на задоцнувањето и
- пред рокот на доспевање (продажба на меницата пред рокот на доспевање).

Дисконтирањето (есконтирање) на меницата претставува финансиска трансакција кога деловен ентитет врши доставување на недоспеана меница до банката при што генерира принос (номинална вредност на меницата намалена за дадена камата и провизии). Всушност, дисконтирање на меницата претставува предвремена продажба или предвремено купување на меницата пред доспевањето при што се плаќа номиналната вредност на меницата (дисконтирана вредност на меницата), намалена за каматата која се пресметува од денот на дисконтирање до денот на доспевање. Деловните ентитети кои имаат меници за продадени стоки или услуги и кои решиле да ги есконтираат кај банката, ги поднесуваат мениците кај одговорните лица во банката. Доколку деловните ентитети достават повеќе меници во еден ден, се поднесува и спецификација на мениците.

Во случај кога дисконтирањето се врши по денот надостасувањето на меницата, тогаш каматата се собира од номиналната вредност.

Каматната стапка по која се пресметува оваа камата е дисконтна стапка, додека добиената камата е дисконт, а сметката во која се врши дисконтирањето претставува дисконтна сметка.

Дисконтирање на меницата - постојат повеќе начини за пресметување на дисконт. Наједноставната пресметка на комерцијален дисконтот е следнава:

$$\boxed{D_k = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}}$$

Пресметката на рационалниот дисконт е следнава:

$$\boxed{Dr = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100 + p \cdot t}}$$

Банките дисконтирањето го вршат користејќи го банкарскиот дисконт и ефективната сума која ја добива сопственикот на меницата се пресметува според следнава равенка:

$$\boxed{E = N - \left(1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100}\right)}$$

1. Меница со номинална вредност од $ 1 000 е поднесена до банка на ден 10. 09. 2009 година. Дисконтната стапка изнесува 7%, додека рокот на доспевање е на ден 30.09.2009 година. Врз основа на дадените параметри да се пресмета комерцијалниот и рационалниот дисконт, како и разликата помеѓу нив.

$N = \$\ 1\ 000$
$t = 20$ дена
$p = 7\%$

$$\text{Dk} = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100} = \$3{,}89 \qquad \text{Dr} = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100 + 7 \cdot 20} = \$3{,}87$$

$\text{Dk} - \text{Dr} = \$\,3{,}89 - \$\,3{,}87 = \$\,0{,}02$ ♦

2. Деловниот ентитет X е сопственик на меница врз основа на продажба на транспортно средство во износ од $ 100 000, која треба да ја наплати на 01.10.2009. Меѓутоа, деловниот ентитет има потреба од финансиски средства и одлучува да ја поднесе меницата на есконтирање во дадена банка на ден 06.09.2009, со дисконтна стапка од 8%. За услугата за дисконтирање, банката наплатува провизија во износ од 0,5% и $100 манипулативни трошоци.

$N = \$\ 100\ 000$
$p = 8\%$
$t = 25$ дена

Пресметка на ефективна сума:

$$\text{E} = \text{N} \cdot (1 - \frac{\text{p} \cdot \text{t}}{360 \cdot 100)}) = \$100000 \cdot (1 - \frac{8 \cdot 25}{360 \cdot 100}) = \$99444{,}44$$

Врз основа на ефективната сума, дисконтот изнесува:

$D = \$\ 100\ 000 – \$\ 99\ 444{,}44 = \$\ 555{,}56$

или дисконт пресметан со равенка за комерцијален дисконт:

$$\text{Dk} = \frac{\text{N} \cdot \text{t} \cdot \text{p}}{360 \cdot 100} = \frac{100000 \cdot 8 \cdot 25}{36000} = \$555{,}56$$

Износот на провизијата врз основа на услугата за дисконтирање изнесува:

$$\$99444{,}44 \frac{0{,}5}{100} = \$497.$$

Со вкалкулирање и на манипулативните трошоци ($ 100), деловниот ентитет ќе добие ефективна сума во износ од:

$ 99 444,44 – $ 497 – $ 100 = $ 98 847,44. ♦

3. Компанијата А на ден 01.05. 2009 година, доставила три меници со еднакви номинални вредности од $ 20 000, на есконтирање до банката, при што мениците имаат различен рок на доспевање. Да се пресмета износот на парични средства што ги исплати банката на компанијата на ден 01.05, ако дисконтната стапка е 6%, провизијата е 1% а манипулативните трошоци се $ 20.

Меницата е дисконтирана на ден 01.05.2010

	Износ (N)	Рок на доспевање	Денови	*Dk*
Меница А	$ 20 000	01.04.2009	30	$ 100
Меница Б	$ 20 000	20.03.2009	41	$ 137
Меница Ц	$ 20 000	15.03.2009	46	$ 153
	$ 60 000			$\sum Dk$ = $ 390

p = 6 %

$\sum Dk =$ $ 390

провизија = 1%

манипулативни трошоци = $ 20

ефективна сума = $\sum N - \sum Dk$ = 60 000 – 390 = $ 59 610

- (провизија = 59 610 x 0,01 = 596,1)

= 59 013,9

- (20)

= 58 993,9

Банката на 01.05.2010 ќе ѝ исплати на компанијата А износ од 58 993,9 денари за дисконтираните три еднакви меници со различен рок на доспевање. ♦

Кога се врши купување на меници, вкупните трошоци се додаваат на дисконтираната вредност на меницата.

4. Одредено лице во банка на ден 01.05 приложува меница (А) со номинална вредност од 50 000 денари со рок на доспевање на ден 16.05 и меница (Б) со номинална вредност од 70 000 денари и рок на доспевање на 31.07. Лицето поднесува барање дисконтираните вредности на мениците да се префрлат на неговата сметка на средна дата (на ист ден да располага со двете суми), но притоа ниту банката ниту лицето да не се оштетени. Дисконтната стапка е 8% и за двете меници. Кој е датумот на исплата на сумата од дисконтираните меници и колку изнесува ефективната сума што ќе му се исплати на лицето?

Од приложените параметри добиваме:

- за меница (А), номинална вреднсот N_1 = 50 000 денари и t_1 = 15 дена, и
- за меница (Б), номинална вреднсот N_1 = 70 000 денари и t_1 = 92 дена.

Формула за пресметка на среден рок на дисконтирање:

$$\boxed{\mathrm{t_s} = \frac{\sum_{t=1}^{n} N_i t_i}{\sum_{t=1}^{n} N_i}}$$

$$\text{среден рок на дисконтирање } = \frac{50000 \cdot 15 + 70000 \cdot 92}{50000 + 70000} = 60 \text{ денови}$$

$p = 8\%$

$$\mathrm{Dk} = \frac{\mathrm{N \cdot t \cdot p}}{360 \cdot 100} = \frac{(50000 + 70000) \cdot 60 \cdot 8}{36000} = 1600$$

ефективна сума: (50 000+70 000) – 1 600 = 118 400 денари.

◆

Задачи за самостојна работа

1. Кои параметри се користат при дисконтните пресметувања?

2. Што претставува меница и од кои елементи се состои?

3. Наброј ги субјектите при трансакција со меница?

4. Меница со номинална вредност од 2 500 денари е поднесена на ескontирање до банка на ден 15.10. Дисконтната стапка изнесува 9%, а рокот на доспевање е на ден 20.11. Врз основа на дадените параметри, пресметај ги комерцијалниот и рационалниот дисконт, како и разликата помеѓу нив.

5. Компанијата А врз основа на продадена стока, добива меница со номинална вредност од $ 1 200 000 со рок на доспевање на ден 01.04.2010 година. Поради потребата од дополнителни парични средства, компанијата одлучува да ја продаде меницата (да ја есконтира) на ден 15.03.2010 година. Дисконтната стапка изнесува 7%, провизија 0,05 и $ 500 манипуплативни трошоци. Врз основа на дисконтирање на меницата, пресметај колку компанијата добила од банката?

1. 6. Влоговни (депозитни) сметки

Банките претставуваат депозитно - кредитни институциии кои мобилизираат слободни парични средства од суфицитни субјекти (штедачи) и одобруваат кредити на дефицитни субјекти (ентитети кои имаат продуктивни инвестициони идеи, но немаат доволно капитал за реализирање на истите). Имено, традиционални извори на банките се депозитите (орочени депозити и депозити по видување), кои се основа на банката за одобрување кредити, инвестирање и генерирање приход. На тој начин, банките овозоможуваат штедна и кредитна функција преку што овозможуваат ефикасна алокација на паричните фондови и генерирање принос во вид на камата за депонентите (вложувачи во банката) и за банката (врз основа на одобрени кредити).

Секој граѓанин кој сака да штеди може својот паричен депозит да го вложи во банка. За штедниот влог како паричен депозит вложен во банката, се издава штедна книшка во која се пишуваат уплатите, исплатите, состојбата и пресметаните камати по штеден влог. Штедната книшка може да гласи на име и на лице под старателство. Суштествени елементи на жиро-сметката се следниве: име и презиме на вложувачот, дата на раѓање и матичен број, жиро - сметка на банката, бројот на книшката и место за забелешка на банката (ознака дека парите се вложуваат по видување или се орочуваат на определен временски интервал).

Штедната книшка се заверува со потпис и печат на банката. Потребно е да се потенцира дека сите уплати и исплати се внесуваат во книшката и тоа на денот кога настанала промената и секоја промена се заверува со печат и потпис од страна на благајникот.

Со средствата од штедната книшка може да располагаат:

- лицето на која гласи штедната книшка и
- ополномоштено лице овластено од вложувачот, законски застапник и старател.

Вложувањето на депозит (влог) во банката е во функција на штедење, па затоа овој вид на сметки за вложен депозит се нарекуваат сметки на штедни влогови или влоговни сметки. Штедните влогови можат да бидат:

- по видување и орочени (орочени со месечно подигање на каматата, со отказен рок или без отказен рок, со посебна намена или без намена);
- отворени штедни влогови и
- детско отворено денарско штедење.

Податоците за депозитите на граѓаните претставуваат деловна тајна на банката. Исто така, банката може да отвори штедни книшки на странски физички лица во Република Македонија. Каматните стапки се пропишани со деловната политика на банката.

Висината на каматната стапка што се исплаќа на депонентите зависи од од тоа дали станува збор за депозити (влогови) по видување или за орочени депозити. Каматата (интерес) е парична сума, која се плаќа за користење на туѓ капитал. Оваа дефиниција за камата се однесува и на вложени парични средства, при што банката, во која тие се вложени за определен временски период, ги користи средствата и на вложувачите, на кои како надомест, им плаќа камата.

Каматата се пресметува и се додава на влогот (депозитот) на крајот на календарската година за депозити по видување, додека за орочени депозити, каматата се додава на крајот од рокот на орочување. Пресметување на камата, банката врши и на исплатената сума, а самата разлика од каматите на вложената и исплатената сума се допишува на депозитот (штедниот влог).

Денарските штедни влогови се осигурани во Фондот за осигурување на штедни влогови. Фондот ги обештетува физичките лица во висина на 100% од депозитот на секое физичко лице до износот од денарска противвредност на 10 000 ЕУР и 90% од депозитот на секое физичко лице во една банка или штедилница до износот од денарска противвредност помеѓу 10 000 ЕУР и 20 000 ЕУР, но не повеќе од денарската противвредност на 20 000 ЕУР. Во наведениот износ се пресметува главнината на штедниот влог зголемена за камата во висина најмногу до есконтната стапка на Народна банка на Република Македонија, важечка во соодветниот период.

При пресметката на камата за штедни влогови се користи равенката за пресметка на проста камата. При пресметување на простата и сложената камата се вкалкулираат следниве компоненти:

- основна сума - K_o (депозит, зголемен капитал, намален капитал), кој е предмет на вкаматување;
- каматен период, кој е еднаков на времето за кое се вложуваат или користат паричните средства;
- каматна стапка, интерес (p или i);
- каматата, која е еднаква на сумата к која банката треба да ја плати на депонентот, пресметана според договорената каматна стапка и договорениот каматен период.

Формули за пресметка на проста камата во случај кога периодот на вложување е изразен во години, месеци и денови:

- орочени влогови на година $\boxed{k = \frac{K_0 p}{100}}$ или години $\boxed{k = \frac{K_0 pn}{100}}$
- орочени влогови по месеци $\boxed{k = \frac{K_0 pm}{1200}}$

- на пресметка на камата по денови $\boxed{k = \frac{K_0 pt}{36500}}$

За пресметка на камата за дадени влогови, се користи таблицата за детерминирање на деновите за подигање на дадена сума (исплата) пари или деновите за внесување на нови влогови (уплата).

Табела 1

Број на денови по календар до крајот на годината

Ден	Јан.	Феб.	Март	Апр	Мај	Јуни	Јули	Авг.	Сеп.	Окт.	Ноем.	Дек.
1.	365	334	306	275	245	214	184	153	122	92	61	31
2.	364	333	305	274	244	213	183	152	121	91	60	30
3.	363	332	304	273	243	212	182	151	120	90	59	29
4.	362	331	303	272	242	211	181	150	119	89	58	28
5.	361	330	302	271	241	210	180	149	118	88	57	27
6.	360	329	301	270	240	209	179	148	117	87	56	26
7.	359	328	300	269	239	208	178	147	116	86	55	25
8.	358	327	299	268	238	207	177	146	115	85	54	24
9.	357	326	298	267	237	206	176	145	114	84	53	23
10.	356	325	297	266	236	205	175	144	113	83	52	22
11.	355	324	296	265	235	204	174	143	112	82	51	21
12.	354	323	295	264	234	203	173	142	111	81	50	20
13.	353	322	294	263	233	202	172	141	110	80	49	19
14.	352	321	293	262	232	201	171	140	109	79	48	18
15.	351	320	292	261	231	200	170	139	108	78	47	17
16.	350	319	291	260	230	199	169	138	107	77	46	16
17.	349	318	290	259	229	198	168	137	106	76	45	15
18.	348	317	289	258	228	197	167	136	105	75	44	14
19.	347	316	288	257	227	196	166	135	104	74	43	13
20.	346	315	287	256	226	195	165	134	103	73	42	12
21.	345	314	286	255	225	194	164	133	102	72	41	11
22.	344	313	285	254	224	193	163	132	101	71	40	10
23.	343	312	284	253	223	192	162	131	100	70	39	9
24.	342	311	283	252	222	191	161	130	99	69	38	8
25.	341	310	282	251	221	190	160	129	98	68	37	7
26.	340	309	281	250	220	189	159	128	97	67	36	6
27.	339	308	280	249	219	188	158	127	96	66	35	5
28.	338	307	279	248	218	187	157	126	95	65	34	4
29.	337		278	247	217	186	156	125	94	64	33	3
30.	336		277	246	216	185	155	124	93	63	32	2
31.	335		276		215		154	123		62		1

1. Одреден субјект вложил во банката паричен износ од 10.000 денари со 9% годишна каматна стапка. Со колку пари ќе располага депонентот после 5 месеци?

K_o= 10 000 денари

$p = 9\%$
$m = 5$ месеци

Врз основа на дадените параметри, каматата која депонентот ќе ја добие после пет месеци изнесува:

$$k = \frac{10000 \cdot 9 \cdot 5}{1200} = 375 \text{ денари}$$

Врз основа на пресметаната камата, депонентот по пет месеци, ќе располага со 10.375 денари, како резултат на зголемениот основен капитал со каматата за дадениот период на вкаматување. ♦

2. Одредено лице вложува 100 000 денари во банка, на ден 25.05, додека на 01.10 подигнал 45 000 денари. Колку изнесува износот на каматата на крајот од годината, ако банката применува каматна стапка во висина од 5%.

$K_0 = 100\,000$ денари
$p = 5\%$
$t_1 = 221$ дена (од 25.05 до крајот на годината)
$K_1 = -45\,000$ денари
$t_2 = 92$ дена (од 01.10 до крајот на годината)

$$i = i_1 - i_2 = \frac{100000 \cdot 5 \cdot 221}{36500} - \frac{45000 \cdot 5 \cdot 92}{36500} = 3027{,}4 - 567 = 2460{,}3\,. \ ♦$$

3. Во текот на 2009 годината на сметката на штедните влогови на депонентот X настанале промени, при што каматната стапка е во износ од 5%:

10.01.2009	Уплата	10 000
15.02.2009	Уплата	8 000
01.03.2009	Исплата	6 000
20.03.2009	Уплата	2 000

Врз основа на горенаведеното да се прокнижат сите промени на влоговната сметка.

За секоја уплата и исплата веднаш се пресметува каматата од денот на уплата (исплата) до крајот на годината.

камата: 5%

Датум	Уплати	Исплати	Салдо	Ден	Камата		
					+	–	Салдо
10.01.2009	10 000		10 000	356	487,67		487,67
15.02.2009	8 000		18 000	320	351		838,67
01.03.2009		6 000	12 000	306		251,5	587,16
20.12.2009	2 000		14 000	12	3,29		590,44
31.12.2009	590,44	Камата	14 590,44			590,44	
Вкупно 31.12.2009	20 590,44	6 000	14 590,44		841,96	841,96	0

Задачи за самостојна работа

1. Кои се традиционални извори на банките врз основа на кои банката прави пласмани?

2. Да се набројат компонентите кои се применуваат при пресметката на проста и сложена камата?

3. Да се набројат суштествени те елементи на жиро-сметката?

4. Лицето А, на ден 25.01.2010 година, вложува во банка износ од 50 000 денари, а на ден 20.09.2010 година подигнал 35 000. Да се пресмета износот (салдото) на крајот од годината ако банката применува каматна стапка во висина од 8%.

5. Во текот на 2009 година, на сметката за штедни влогови на лицето X, се извршени следниве промени:

05.01. 2009	Уплата	3 000
20.01. 2009	Исплата	2 500
31.01.2009	Уплата	3 200
28.02.2009	Уплата	3 350
03.04.2009	Исплата	4 000
04.06.2009	Уплата	5 000
09.09.2009	Исплата	3 700
10.11.2009	Уплата	3 000
25.12.2009	Исплата	5 000

Да се пресметаат промените на штедната книшка (сметка) ако каматната стапка е 7.5%.

1. 7. Кредитна жиро - сметка

Во рамките на стопанисувањето, банките и финансиските институции вршат трансфер на капиталот во потенцијално продуктивни цели. Имено, одредени деловни ентитети имаат инвестициски планови, но немаат доволно средства за нивно реализирање. Исто така, домаќинствата се соочуваат со потребата од дополнителен капитал наменет за лична потрошувачка. Со цел да се задоволат барањата на корпоративните клиенти и домаќинствата, банките одобруваат бизнис кредити и потрошувачки кредити за населението.

Во зависност од рокот на доспевање, се разликуваат следниве видови кредити:

- краткорочни кредити (рок на доспевање до една година);
- среднорочни кредити (рок на доспевање од една до три години) и
- долгорочни кредити (рок на доспевање над три години).

Краткорочните кредити се наменети за финансирање на тековните потреби на клиентите, одржување на краткорочната ликвидност во трговијата, за производство, за извоз и плаќање на услуги. Користењето на краткорочните кредити е по барање на клиентот и може да биде сукцесивно или револвинг. Враќањето на кредитот е во еднакви месечни ануитети до рокот на враќање или револвинг со договорна динамика. Обезбедувањето на кредитите се врши со хипотека на недвижност, залог на подвижни предмети, депозит, банкарска гаранција, хартии од вредност и права.

Долгорочни кредити за правни лица – намената на овој вид кредити е за долгорочни вложувања, реализација на инвестициони проекти, купување на основни средства и сл. Рокот на враќање на долгорочните кредити е до три години (или над три години во зависност од политиката на банката). Деноминирани се во денари или се денарски со девизна клаузула.

Начинот на користење на долгорочните кредити е во зависност од барањето на клиентот, сукцесивно на база на документација која докажува наменско користење на средствата. Кредитот се враќа во еднакви месечни ануитети, месечно, тромесечно или полугодишно во зависност од динамиката на инвестицијата. Кредитите се обезбедуваат со хипотека на недвижност, залог на подвижни предмети, депозит, банкарска гаранција, хартии од вредност и права.

Цената на кредитите (каматна стапка) се детерминира во зависност од видот и рочноста на кредитот. За одобрените кредити, банката води посебна сметка, кредитна сметка. Одобрениот кредит се пренесува на жиро - сметка на корисникот преку која се врши и користењето на кредитот. Во случај да дојде до неплаќање на ануитетот (отплата на кредитот и каматата) во предвидениот рок, покрај редовната, се наплаќа и казнета камата. При пресметката на камата деновите се земаат по календар, а за годината се зема 365 денови или 366 денови кога таа е престапна.

За одобрените кредити се води евиденција преку кредитна и жиро - сметка и тоа по електронски пат.

1. Корпоративниот клиент X, од една банка има одобрение за користење на кредит во износ од 1 000 000 денари, со рок на достасување 30.07.2010 година. Каматната стапка за редовната камата е 9% годишно, а за казнената камата 3% годишно. Претпријатието на 01.02.2010 го искористува целосно одобрениот кредит, додека отплатите се реализирале по следниов тек:

20.03.2010	I. отплата	100 000 денари
15.04.2010	II. отплата	120 000 денари
01.08.2010	III. отплата	180 000 денари
15.08.2010	IV. отплата	600 000 денари

Да се прикажат сите промени на кредитната сметка на банката (со пресметка на редовна и казнета камата) заклучно со 30.09.2010 година. Исто така да се извршат и промените на жиро - сметката на корпоративниот клиент X.

Датум на промената	Износ на промената		Денови за		Камата	
	Да дава	Да зема	Редовна камата	Казнена камата	Редовна камата	Казнена камата
01.02.2010	1 000 000		242		д 59 672	
20.03.2010		100 000	194		з 4 784	
15.04.2010		120 000	168		з 4 971	
01.08.2010		180 000	66		з 7 457	
15.08.2010		600 000	15	46	з 2 219	д 2 268,5
Вкупно:	1 000 000	1 000 000			д 79 103	д 2 268,5

Деновите за редовната камата за износот на кредитот се пресметани за периодот од 01.02 до 30.09. Со износот на каматата се задолжува корисникот на кредитот (дава, ознака - Д). Деновите за редовната камата за другите промени се сметаат од датумот на промената до крајот на пресметковниот период (30.09.2010). Каматата за овој број денови, за соодветната промена, се одзема (зема, ознака-З). Деновите за казнената камата се сметаат од рокот на достасаноста на кредитот до датумот на промената. Со оваа камата се задолжува корисникот.

Жиро - сметка на корпорација X

Дата на промената	Опис	Износ на промената		Салдо
		да дава	да зема	
15.01.2010	Салдо		500 000	500 000
01.02.2010	Кредит		1 000 000	1 500 000
20.03. 2010	I отплата	100 000		1 400 000
15.04. 2010	II отплата	120 000		1 280 000
01.08. 2010	III отплата	180 000		1 100 000
15. 08.2010	IV отплата	600 000		500 000
30.09.2010	9%камата	79 103		420 897
30.09.2010	3% казнена камата	2 268,5		418 628,5
30.09.2010	Салдо за изедначување	418 628,5		
		1 500 000	1 500 000	
01.10	Салдо			418 628,5

Задачи за самостојна работа

1. Да се набројат кои видови на кредити постојат во зависност од рокот на доспевање?

2. Наведи ги карактеристиките и намената на краткорочните кредити.

3. Наведи ги карактеристиките и намената на долгорочните кредити?

4. Од што зависи цената на кредитот?

5. Фирма X, од една банка има одобрено кредит во износ од 20 000 денари, со рок на достасување 26.04.2010 година. Каматната стапка за редовната камата е 7,5% годишно, а за казнената камата 2% годишно. Претпријатието на 01.03.2010 го искористува целосно одобрениот кредит, додека отплатите се реализирале по следниов тек:

05.03.2010	I. отплата	270 денари
12.04.2010	II. отплата	580 денари
17.05.2010	III. отплата	700 денари
23.05.2010	IV. отплата	18 450 денари

Да се прикажат сите промени на кредитната сметка на банката (со пресметка на редовна и казнета камата) заклучно со 30.06.2010 година. Исто така да се извршат и промените на жиро - сметката на фирмата X, ако почетното салдо на жиро - сметката изнесува 50 000 денари.

1. 8. Задачи за вежбање

1. За колку време 17 628 денари ќе донесат камата во износ 2 393 денари, ако каматната стапка е 6% ?

2. Пресметај ја основната вложена сума за која за период 20 март - 28 јуни, со временска матрица $(k,360)$, со каматна стапка 4,75% се пресметува двапати поголема камата отколку онаа која се пресметува за сумите 20 000 денари на 3 месеци, 40 000 денари на 5 месеци и 12 000 денари на 6 месеци, со каматна стапка 4,5%.

3*. Пресметај ја каматната стапка со која за 60 000 денари, вложени на периодот 8.03 – 29.06, по принцип $(k,360)$, се пресметува камата која претставува 45% од пресметаната камата за сумите од 25000 денари на период 8.04 – 30.06, 62 000 денари на период 18.04 – 30.06 и 75 600 денари на период 4.05 – 30.06, со временска матрица $(k,365)$ и каматна стапка 6,5%.

4*. Една третина од основната сума е вложена на 1,5 година, две петтини од сумата на 4 месеци, а остатокот на 80 дена. Каматната стапка за сите поединечни суми е 4%. Вкупната пресметана камата е 8 500 денари. Колкава е основната сума?

5. По намалување на основната сума за камата од 4,75%, за четири месеци, должникот примил 295 250 денари. Колкав е долгот, а колкава каматата?

6. Вклучувајќи ја и пресметаната камата со 6%, камата за 60 дена, должникот вратил 50 500 денари. Колкава камата ќе донесе капитал двапати поголем од почетниот, ако се орочи на 3 години, за истата каматна стапка?

7. По одбивањето на 9% камата, за периодот 25.01 – 31.08, сметајќи го времето календарски $(k,365)$, примени се 100 000 денари. Колкав е долгот, а колкава пресметаната камата?

8. Поединец треба да исплати четири долгови на банката и тоа: 45 000 денари со 6% камата на 10.04, 100 000 денари со 8% камата на 25.04, 70 000 денари со 9% камата на 20.05 и 100 000 денари со 4% камата на 31.05. На кој ден и со која каматна стапка може поединецот да ги исплати долговите, без никој да биде оштетен.

9. Трговско друштво должи на различни добавувачи 40 000 денари со 4% камата за 120 дена, 60 000 денари со 4% камата за 240 дена и 100 000 денари со 4% камата за 300 дена. По колку дена претпријатието може да ги плати сите три суми наеднаш?

10. Трговското друштво X долгува 80 000 денари на 5.04, 150 000 денари на 20.05 и 275 000 денари на 30.06. Истовремено побарува 130 000 денари на 17.03 и 900 000 денари на 5.08. На кој датум може да се плати салдото на долгот?

11. Компанијата X доставила на есконтирање меница до една банка на ден 06.04.2009 година. Номиналната вредност на меницата изнесува $ 250 000, а рокот на доспевање е на ден 15.05.2009 година. Пресметај го комерцијалниот дисконт и ефективната сума ако банката применува дисконтна стапка од 8%.

12. Компанија Е врз основа на продажба на опрема добива меница во висина од 3 000 000 денари, која треба да ја плати на ден 20.04.2009 година. Поради соочување со проблем од неликвидност, компанијата одлучува да ја есконтира меницата на ден 21.03.2009 година. Дисконтната стапка е 6%, провизија за процесот на дисконтирање изнесува 0,025% и 50 денари изнесуваат манипулативните трошоци. Колку изнесува ефективната сума што ја исплатила банката на сметка на компанијата?

13. Фирма X е сопственик на меница од 150 000 денари и рок на доспевање на ден 05.05.2009. Фирмата донесува одлука за предвремена продажба на меницата, односно да ја есконтира меницата во банка и тоа ден 05.03.2009, со дисконтна стапка од 9%, провизија во износ од 0,045 и 100 денари манипулативен трошок. Колку изнесува ефективната сума од дисконтираната меница, а колку изнесува комерцијалниот дисконт?

14. На ден 20.04.2010 година, една банка, примила на дисконтирање три еднакви меници со номинална вредност од $ 50 000, а дати на доспевање се следниве: 20.06.2010 година, 10.07.2010 година и на ден 20.07.2010 година. Колку ќе исплати банката на 20.04.2010, ако дисконтната стапка е 8,5 %, провизијата е во износ од 1% и манипулативните трошоци се во износ од 19 денари.

15. Во една банка на ден 15.03.2010 се поднесени две меница за есконтирање:

- меница X со номинална вредност од $ 3 000 000 и дата на плаќање на ден 25.01.2010 година и
- меница У со номинална вредност од $ 5 000 000 и дата на плаќањена ден 20.06. 2010 година.

Клиентот доставил барање дисконтираните вредности на мениците да се префрлат на негова сметка на средна дата (на истиот ден да се располага со двете суми). Да се детерминира датумот на која ќе се исплтат дисконтираните вредности.

16. На ден 01.08 се вложени 400 000 денари, а на ден 02.10 се подигнати 120 000 денари. Ако се применува каматна стапка од 5%, колку изнесува каматата на крајот од годината?

17. Во текот на 2010 годината на сметката на штедните влогови на депонентот У, настанале промени, при што каматната стапка е во износ од 10%:

15.03.2009	Уплата	50 000
01.04.2009	Исплата	20 000
05.06.2009	Уплата	18 000
07.07.2009	Исплата	15 000
08.08.2009	Уплата	18 000
01.09.2009	Исплата	13 000

Врз основа на горенаведеното да се прокнижат сите промени на влоговната сметка.

18*. Фирма У, од соодветна банка има одобрено кредит во износ од 70 000 денари, со рок на достасување 25.06.2010 година. Каматната стапка за редовната камата е 10% годишно, а за казнената камата 2% годишно. Претпријатието на 01.04.2010 го искористува целосно одобрениот кредит, додека отплатите се реализирале по следниов тек:

01.05.2010	I. отплата	7 000 денари
10.05.2010	II. отплата	10 000 денари
20.06.2010	III. отплата	15 000 денари
25.07.2010	IV. отплата	38 000 денари

Да се прикажат сите промени на кредитната сметка на банката (со пресметка на редовна и казнета камата) заклучно со 30.08.2010 година. Исто така да се извршат и промените на жиро - сметката на фирмата Х, ако почетното салдо на жиро - сметката ознесува 30 000 денари.

Тематски преглед

Каматата претставува процентен износ од вложената сума, односно од позајмената сума, како парична надокнада која должникот му ја плаќа на доверителот. Доколку каматата се пресметува само на капиталот вложен на иста основна сума во секој период на пресметување на каматата, се нарекува **проста камата**.

Пресметувањето на простата камата, како и останатите величини од кои таа зависи, се нарекува **проста каматна сметка**. За четирите основни величини кои се јавуваат при проста каматна стапка важи:

$$\boxed{i=\frac{Kpt}{100}}$$

K - основна сума

i - пресметана камата

p - каматна стапка

t - времето за кое се пресметува каматата

Среден рок се нарекува времето за кое може да се исплатат наеднаш повеќе долговни суми, наместо истите суми да се исплаќаат во различни рокови. Постапката на утврдување на средниот рок и средната стапка, се нарекува **терминска сметка** и претставува една примена на простата каматна стапка. **Рок на салдо на долгот** е рок во кој може да се исплати разликата помеѓу долгот и побарувањата, во ситуација во која покрај тоа што има долг, лицето е и доверител за некои други должници.

Доколку знаеме со која средна каматна стапка ќе вкаматуваме, времето за враќање на вкупниот долг се пресметува по формулата

$$\boxed{t_s=\frac{K_1p_1t_1+K_2p_2t_2+...+K_np_nt_n}{p_s\left(K_1+K_2+...+K_n\right)}},$$

а доколку го знаеме времето за враќање на вкупниот долг, средната каматна стапка, се пресметува по формулата

$$\boxed{p_s=\frac{K_1p_1t_1+K_2p_2t_2+...+K_np_nt_n}{t_s\left(K_1+K_2+...+K_n\right)}},$$

каде K_1, K_2, ..., K_n, се износи на долгови со каматни стапки p_1, p_2, ..., p_n, соодветно, кои доспеваат за временски периоди t_1, t_2, ..., t_n.

Рокот на салдото на долгот се пресметува по формулата

$$\boxed{t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n - \left(P_1 p_1{}^0 t_1{}^0 + P_2 p_2{}^0 t_2{}^0 + ... + P_m p_m{}^0 t_m{}^0\right)}{Sp_s}}$$

каде $K_1, K_2, ..., K_n$ се обврските на должникот по $t_1, t_2, ..., t_n$ денови, со каматни стапки $p_1, p_2, ..., p_n$, а $P_1, P_2, ..., P_m$ се побарувања со рокови $t_1{}^0, t_2{}^0, ..., t_m{}^0$ денови и со каматни стапки $p_1{}^0, p_2{}^0, ..., p_m{}^0$.

При предвремена исплата на дадено номинално задолжување, кое треба да се плати на определен датум во иднина, сумата за која се намалува номиналното задолжување во моментот пред рокот на доспевање на долгот, се нарекува **дисконт**.

Постапката на конверзија на едно задолжување кое треба да се плати на определена дата во задолжување кое предвремено се плаќа на одредена дата се нарекува **дисконтирање**.

При дисконтните пресметувања се користат следниве параметри:

N - номинална вредност на која гласи финансискиот инструмент

t,n,n - дисконтен (есконтен) рок, кој е еднаков на времето изразено во број на денови - *t*, месеци - *m*, години - *n,* од денот на дисконтирање на инструментот, до денот на доспевање на инструментите

D - дисконт (есконт), кој е еднаков на сумата за која се намалува номиналната вредност на финансискиот инструмент

p - каматна стапка (дисконтна стапка) по која е пресметан дисконтот

E - реална (ефективна) сума со која се отплаќа номиналното задолжение во поментот на предвремено плаќање.

Постојат два вида на дисконти: **комерцијален дисконт** - *Dk,* кај кој за основа на пресметувањето на дисконтот се зема номиналната вредност, а ефективната вредност се добива како разлика на номиналната вредност и **рационален** (математички) дисконт - *Dr*, кај кој номиналната вредност се добива како збир на ефективната вредност и соодветната камата, која се пресметува за ефективната вредност.

Меницата претставува хартија од вредност по наредба и нејзиниот емитент (трасант) дава безусловна наредба на друго лице (трасат), да се исплати одреден паричен износ на корисникот на исправата (ремитент), кој е наведен на меницата или на самиот трасант.

Основни видови на меници се **трасираната** и **сопствената** меница. Трасираната меница треба да содржи: ознака за меница, име и седиште на трасатот, име на ремитент, безусловна наредба да се плати одредена сума пари од покритието на трасантот; време на пристигнувањето, место каде што треба да се изврши плакањето, ден и место на издавање и потпис на трасантот. Сопствената меница содржи: ознака за меницата, безусловно ветување дека одредена сума на пари ќе се плати, време на пристигнувањето, место каде што треба да се изврши плаќањето, име на ремитентот, ден и место на издавање и потпис на трасантот.

Менични работи се правни дејствија и работи кои можат да се вршат со меницата: издавање на меница, индосирање на меница, акцептирање на меница, цесија на меница, авалирање на меница, откупување на меница, амортизација, отповикување, протест на меница и др.

Карактеристични менични начела што наоѓаат примена во менично правните работи се: писменост, инкорпорација, фиксност на меничната обврска, менична строгост, менична солидарност, менична самостојност и менична непосреденост.

Дисконтирање на меницата претставува предвремена продажба или предвремено купување на меницата пред доспевањето при што се плаќа номиналната вредност на меницата (дисконтирана вредност на меницата), намалена за каматата која се пресметува од денот на дисконтирање до денот на доспевање.

Комерцијален дисконтот се пресметува по формулата

$$\boxed{D_k = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}}$$

а рационалниот се пресметува по формулата

$$\boxed{Dr = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100 + p \cdot t}},$$

каде N е номиналната вредност, t е дисконтниот рок изразен во денови и p е каматната стапка по која е пресметан дисконтот.

Ефективната сума која ја добива сопственикот на меницата при банкарскиот дисконт се пресметува според следнава формула:

$$\boxed{E = N - \left(1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100}\right)},$$

каде N е номиналната вредност, t е дисконтниот рок изразен во денови и p е каматната стапка по која е пресметан дисконтот.

Вложувањето на влог во банка е во функција на штедење, па затоа овој вид на сметки за вложен депозит се нарекуваат сметки на штедни влогови.

При пресметката на камата за штедни влогови се користи равенката за пресметка на проста камата. Формули за пресметка на проста камата во случај кога периодот на вложување е изразен во години, месеци и денови се:

- $k = \frac{K_0 pn}{100}$ за орочени влогови по години

- $k = \dfrac{K_0 pm}{1200}$ за орочени влогови по месеци
- $k = \dfrac{K_0 pt}{36500}$ за на пресметка на камата по денови

каде K_o е основна сума, p е каматна стапка, и t е каматниот период.

Со цел да се задоволат барањата на клиентите банките одобруваат кредити. Во зависност од рокот на доспевање, разликуваме: краткорочни кредити, среднорочни кредити и долгорочни кредити (рок на доспевање над три години).

2. БЛАГОРОДНИ МЕТАЛИ, ВАЛУТИ И ДЕВИЗИ

2. 1. Финост на благородни метали

Елементите злато, сребро, платина, жива, рутениум, родиум осмиум, паладиум и иридиум познати се како **благородни метали**. Некои од нив се познати од дамнешни времиња. Нивни својства се дека не оксидираат на воздух и не се растопуваат во киселини. Имаат функција на девизни резерви. Затоа, поради нивната важност, контролата на предметите од благородни метали, нивниот состав и содржина (финост), начинот на нивното испитување, жигосување, условите за пуштање во промет и надзорот се уредуваат со закон.

Овде, ќе ги разгледаме златото и среброто. Овие два метали се познати, ценети и користени уште пред повеќе илјада години. Златото и среброто како метали се доста меки и како такви се непрактични за употреба. За да добијат на тврдост, се мешаат со други метали, како што се бакарот, никелот и др. Смесата од два или повеќе метали се нарекува **легура**. Масата на благородниот метал легурата уште ќе ја викаме и **чиста маса**, додека масата на легурата ќе ја викаме **вкупна маса**.

Односот на масата на благородниот метал (чистата маса) и масата на легурата (вкупната маса) се нарекува **финост** на благородниот метал. Изразувањето на финоста на благородниот метал се врши на два начина: **промилен** и **англиски**.

Во промилниот начин финоста на благородниот метал се искажува во промили. Притоа, бројот на промилите дава колку делови благороден метал се содржат во 1000 делови легура. На пример, ако кажеме дека финоста на благородниот метал е 900‰, тоа значи дека во 1000 делови легура се содржат 900 делови благороден метал. Ако ја означиме вкупната маса со m, чистата тежина со m_b и финоста со f тогаш изразувањето на финоста на промилен начин е по формулата: .

$$\boxed{f = \frac{m_b}{m} \cdot 1000\ ‰}$$

1. Пресметај ја финоста на златото (на промилен начин) во златен предмет ако чистата маса изнесува $510g$, а вкупната маса $800g$.

Финоста на златото е $f = \frac{510}{800} \cdot 1000 = 637{,}5$ ‰. ♦

Според англискиот начин на изразување, финоста се изразува во **карати**, а финоста на среброто во **пенивејти**. Чисто злато има финост 24 карати, а финоста на чисто сребро е 240 пенивејти.

2. Златен производ со финост 14 карати, има 14 дела чисто злато од 24 дела легура. ♦

3 Сребрен производ со финост од 200 пенивејти има 200 дела чисто сребро од 240 легура. ♦

Помала мерка од каратот и пенивејтот е **грејн**. Притоа, 1 карат има 4 грејни а 1 пенивејт 24 грејни.

Златото со финост 22 карати се нарекува **стандард злато**, а среброто со финост 222 пенивејти **стандард сребро**. Ако златна (сребрена) легура е подобра од стандард злато (сребро), се користи ознака B (од англ. Better – подобар), односно W (од англ. Worse – полош) ако е полоша.

4. Ако златниот производ е подобар од стандард златото за 1 карат и 2 грејни, запишуваме $B1,,2$. Тоа значи дека златниот предмет има ($22+1,,2=23,,2$) 23 карати и 2 грејни. ♦

5. Сребрен предмет со финост $W7,,7$ е полош од стандард среброто за 7 пенивејти и 7 грејни. Бидејќи $222-7,,7=221,,24-7,,7=214,,17$, заклучуваме дека финоста на сребрениот предмет е 214 пенивејти и 17 грејни. ♦

Задачи за самостојна работа

1. а) Што е финост на благороден метал?
б) Кои се начините на изразување на финоста на благороден метал?

2. Колку дела бакар има златна легура со финост:
а) 920‰ б) 870‰?

3. Колку карати има чисто злато, а колку стандард злато?

4. Колку грејни има
а) златен предмет со финост 20 карати;
б) сребрен предмет со финост 210 пенивејти?

5*. Колкава е финоста на
а) златен предмет со $B1,,1$;
б) златен предмет со $W5,,3$;
в) сребрен предмет со $B10,,11$;
в) сребрен предмет со $W12,,8$?

2. 2. Пресметување на финоста

Задачите во кои се пресметува финоста на благороден метал, можат да се поделат на два типа:

- задачи во кои се бара изразување на финоста од промилен начин во англиски и обратно,

- задачи во кои се пресметува финоста на благороден метал ако се познати чистата маса на благородниот метал и вкупната маса на легурата.

1. Изрази ја финоста на злато од $800\,‰$ на англиски начин.

Ја поставуваме пропорцијата $x:24=800:1000$ и добиваме $x=\frac{24\cdot 800}{1000}=19{,}2$ карати. Значи, финоста на златото е $19{,}2$ карати. Бидејќи $0{,}2$ карати се $0{,}2\cdot 4=0{,}8$ грејни можеме да кажеме и дека финоста на златото е 19 карати $0{,}8$ грејни, односно $(22-19,,0.8=21,,4-19,,0{,}8=2,,3{,}2)$ $W\,2,,3{,}2$. ♦

2. На која финост на промилен начин одговара сребро со $B\,8,,6$?

Прво да ја пресметаме финоста во пенивејти. Имаме $222+8,,6=230,,6$. Бидејќи 6 грејни се $\frac{1}{4}$ од еден пенивејт, следува дека финоста на среброто е $230{,}25$ пенивејти.

Од пропорцијата $x:1000=230{,}25:240$ следува $x=\frac{230{,}25\cdot 1000}{240}=959{,}375\,‰$.

Значи, финоста на среброто е $959{,}375\,‰$.♦

3. Сребрен предмет има маса $400g$ и содржи $350g$ чисто сребро. Изрази ја финоста на среброто на промилен начин.

Финоста на среброто е $\frac{350}{400}\cdot 1000\,‰$, односно $875\,‰$.♦

4. Златен предмет со вкупна маса $300g$ содржи $249g$ чисто злато. Изрази ја финоста на златото на двата начина.

Прво ќе ја изразиме финоста на промилен начин. Имаме $\frac{249}{300}\cdot 1000\,‰$, односно $830\,‰$.

Сега ќе ја претставиме на англиски начин. Од пропорцијата $x:24=830:1000$ следува $x=\frac{24\cdot 830}{1000}=19{,}92$ карати, односно 19 карати $3{,}68$ грејни. Заклучуваме дека златниот предмет е со $W\,2,,0{,}32$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Изрази ја финоста на сребро на англиски начин ако на промилен начин е $590\,‰$.

2. Изрази ја финоста на злато на промилен начин, ако на англиски е $B1,,2$.

3. Финоста на злато е $15{,}36$ карати. Изрази ја финоста на златото на промилен начин?

4. Златен предмет со маса $330g$ содржи $198g$ чисто злато. Изрази ја финоста на златото на:

а) промилен начин; б) англиски начин.

5. Сребрен предмет со маса $250g$ содржи $105g$ чисто злато. Изрази ја финоста на среброто на:

а) промилен начин; б) англиски начин.

2. 3. Пресметување на чиста и вкупна маса

За пресметување на чистата маса на благороден метал треба да бидат познати финоста и вкупната маса.

Ќе разгледаме неколку примери.

1. Колку грама злато има во златен предмет со маса $50g$ и финост 920‰?

Од пропорцијата $x:50=920:1000$ следува $x=\dfrac{50\cdot 920}{1000}=46$. Значи, златниот предмет содржи $46g$ чисто злато. ♦

2. Колку грама чисто злато има во златен предмет со финост 18 карати и маса $560g$?

Од пропорцијата $x:560=18:24$ следува $x=\dfrac{560\cdot 18}{24}=420$. Значи, златниот предмет содржи $420g$ чисто злато. ♦

3. Сребрен предмет со финост $W8,,6$ има маса $480g$. Колку грама чисто сребро содржи предметот?

Ја пресметуваме финоста на среброто во пенивејти. Имаме

$$222-8,,6=221,,24-8,,6=213,,18,$$

односно финоста на среброто е $213\dfrac{18}{24}=213\dfrac{3}{4}=213{,}75$ пенивејти.

Сега, од пропорцијата $x:480=213{,}75:240$ следува $x=\dfrac{213{,}75\cdot 480}{240}=427{,}5$. Значи, чистата маса на среброто е $427{,}5g$. ♦

За пресметување на вкупната маса на легура, потребно е да бидат познати финоста на благородниот метал и чистата маса.

4. Колкава маса има предмет од злато со финост $800‰$ и чиста маса на златото $648g$?

Имаме $x:648=1000:800$ и оттука $x=\frac{648\cdot 1000}{800}=810$. Значи, вкуната маса на легурата е $810g$.♦

5. Колкава вкупна маса има сребрен предмет со финост 230 пенивејти и чиста маса на среброто $483g$?

Од пропорцијата $x:483=240:230$ добиваме $x=\frac{483\cdot 240}{230}=504$. Вкупната маса на сребрениот предмет е $504g$. ♦

6. Најди ја вкупната маса на сребрен предмет со финост $B1,,12$ и чиста маса на сребро $1341g$.♦

Финоста на среброто е $222+1,,12=223,,12$ или $223\frac{12}{24}=223{,}5$ пенивејти. Тогаш, од $x:1341=240:223{,}5$ следува $x=\frac{1341\cdot 240}{223{,}5}=1440$. Значи, вкупната маса на предметот е $1440g$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Колку чисто злато содржи златен предмет со маса $180g$ и финост $880‰$?

2. Пресметај ја чистата маса на среброто во сребрен предмет со маса $600g$ и финост $W22,,12$.

3*. Сребрен предмет со финост $850‰$ содржи $595g$ чисто сребро. Колкава е вкупната маса?

4*. Златен предмет со финост $W1,,3$ содржи $324g$ чисто злато. Колкава е вкупната маса?

5*. Златен предмет со финост $750‰$ содржи $126g$ чисто злато. Колку чисто злато треба да се додаде, за финоста на златниот предмет да биде $800‰$?

2. 4. Поим и значење на валути

Зборот валута, којшто води потекло од латинскиот збор „valuta”, има повеќе значења. Под овој поим се подразбира парично важење, односно официјален паричен стандард на една земја. Самиот поим валута има неколку значења:

- може да означува **монетарен систем на одредена земја, со кој се утврдува основната парична единица** (името, обликот, составот);
- може да ги означува **ефективните пари и парични знаци** (паричници, банкноти), како законско средство за плаќање во внатрешните финансиски трансакции, односно ја означуваат основната парична единица, што ја чини основата на монетарниот систем на една земја;
- во меѓународниот промет, под валута се подразбираат само **ефективните странски пари,** паричните знаци кои се присутни (со кои располагаат) резиденти во странска земја.

Во меѓународниот промет со поимот валута не се опфатени паричните сурогати, како што се: чековите, мениците, акредитивите или другите инструменти на меѓународните плаќања или обезбедувања, туку само националните банкноти и монети како официјални парични знаци.

Според законот за девизно работење на Република Македонија, под странска валута се подразбираат сите видови ефективни странски пари, освен странските ковани златни пари, кои се третираат како благороден метал.

Валутата, како парична единица ја чини основата на монетарниот систем на една земја, претставува со закон определена единица што служи како основно мерило на вредноста во една земја.

Во секоја земја со законски акт се утврдува паричната единица и се определува името на националната парична единица (на националната валута). Имињата на валутите на земјите се разликуваат (на пример, сретнуваме: денар, динар, евро, долар, фунта, шилинг и сл.). Но, исто така сретнуваме исто име за повеќе национални валути коишто се разликуваат по сите други елементи (како што се изгледот, внатрешната и интервалутната вредност и сл.). На пример, паричната единица долар, се користи како национална валута во Австралија, Канада, Хонг Конг и САД.

Валутата како основна парична единица се дели, по правило, на помали делови (ситни пари) кои што обично носат други имиња, со примена на децималниот или друг систем (на пример, доларот на САД се дели на 100 центи, македонскиот денар на 100 дени и сл.)

Во времето на металистичките системи, односно на златното важење, секоја земја со автономен акт, а зависно од својата јачина и стабилност, определувала колкаво количество благодарен метал ќе содржи националната валута. Со тоа, фактички, се определувала ковничката стапка, односно се утврдувало колку парични единици ќе се исковаат од една тежинска единица благодарен метал.

Во современите услови на стопанисување, во ниту една национална економија повеќе не функционираат парите со полна метеријална вредност. Тие секаде се заменети со парични знаци, односно со книжни пари. Материјалот од кој се изработени современите пари има многу мала вредност, така што паричните знаци сами по себе немаат никаква вредност. Книжните пари својата вредност ја стекнуваат преку обемот и количеството на стоките и услугите што можат да се произведат во рамките на дадената национална економија. Вредноста на книжните пари се одржува на определено ниво и со помош на поддршката, односно авторитетот на монетарната власт на дадената земја. Монетарната власт ја определува вредноста на националната валута со автономен закон и има задача да обезбеди доволно ликвидни средства за непречено одвивање на економските трансакции во земјата.

Сите трансакции во стоковното стопанство се остваруваат со помош на пари. Затоа монетарниот систем го координира вкупното функционирање на економијата, заснована на делувањето на стоковното производство и пазарот. Нерамнотежите, што можат да настанат во разните сектори на економијата, добиваат паричен израз и се рефлектираат како нерамнотежа на монетарниот сектор на економијата. Од друга страна, монетарниот сектор на економијата може и самиот да биде сектор во кој се создаваат нарамнотежи, кои потоа се трансмитираат во реалниот сектор на економијата. На тој начин доаѓа до формирање на интеракциски однос меѓу делувањето на монетарниот и реалниот сектор на економијата. Формирањето на економските перформанси, како што се стапката на економски раст, стапката на вработеност, стапката на инфлација, стапката на извоз и увоз и сл., се спроведува токму преку интеракциските односи на варијаблите во реалниот и монетарниот сектор на економијата.

Задачи за самостојна работа

1. Објасни го значењето на поимот валута.

2. Дефинирај што е валута.

3. Од што зависи вредноста на валутите?

4. Каква е вредноста на книжните пари?

5. Објасни го поимот монетарен систем и монетарна власт.

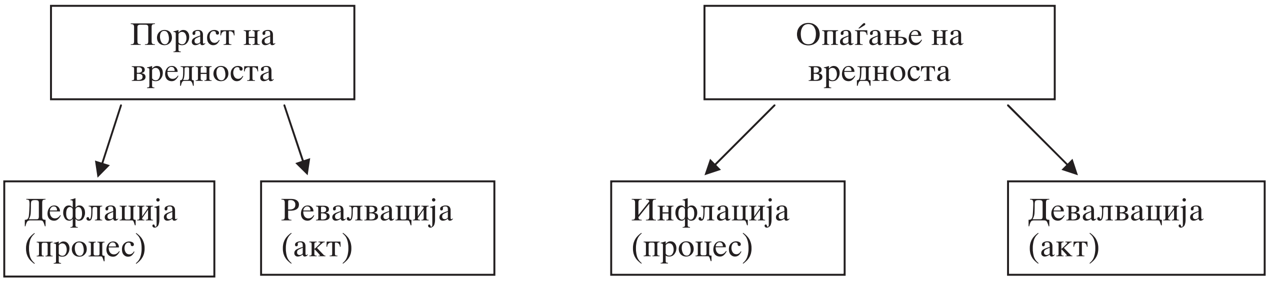
2. 5. Пресметка на промените на вредноста на валутите

Состојбите во една национална економија постојано се менуваат, понекогаш на подобро, а понекогаш на полошо. Во случај да се зголемува општото ниво на продуктивноста во земјата, куповната моќ на националната валута на домашниот пазар ќе расте, иако не дошло до измени во нејзината официјална вредност. Оваа појава се нарекува **апресијација** на валутата.

Во спротивен случај, кога доаѓа до опаѓање на куповната моќ на националната валута на домашниот пазар, без измена на официјалниот курс, таквата појава се нарекува **депресијација.** Доколку ваквите појави се присутни во подолг временски период, тогаш водат кон отварање на процесите на дефлација, односно на инфлација. Излезот од овие ситуации се решава преку промена на вредноста на националната валута во однос на вредноста на странските валути.

Слика 1

Промена на вредноста на националната валута



Континуираните промени во општото ниво на цените ја наметнуваат потребата за промена на курсот на националната валута. Тоа значи дека, намалувањето на интервалутарната вредност на националната валута може да се врши со девалвација и депресијација, додека зголемувањето на интервалутарната вредност може да се врши со ревалвација и апресијација.

Девалвацијата претставува еднostран и еднократен акт на монетарната власт, со што се врши намалување на интервалутарната вредност на националната валута. **Депресијација** претставува процес на постепено намалување на интервалутната вредност на националната валута, настанат по пат на дејствување на економските законитости.

Ревалвацијата претставува еднostран и еднократен акт на монетарната власт, со што се врши зголемување на интервалутарната вредност на националната валута. **Апресијацијата** претставува процес на постепено зголемување на интервалутарната вредност на националната валута, настанат по пат на дејствување на економски законитости.

Во случај на дефлација, монетарните власти на националната економија, со посебен акт ја усогласуваат вредноста на националната валута во однос на странските валути (ревалвација на валутата). Во услови на инфлација, монетарните власти со посебен акт го намалуваат официјалниот курс на домашната валута, со што нејзината вредност ќе опадне, во однос на странските валути.

Во зависност од тековната вредност на една национална валута во однос на друга странска валута, пример, еврото во однос на американскиот долар, вредноста на апресијацијата или депресијацијата на еврото во однос на доларот, се пресметува како дел од зголемувањето или од намалувањето на доларската вредност на еврото.

1. На пример, ако € / $ девизниот курс се промени од €1 = $ 0,93 на €1 = $ 1,09, се вели дека еврото апресира од промената на нејзината доларска вредност за
(1,09 – 0,93)/0,93 = 17.20 %.♦

Општа формула за пресметка на апресијацијата или депресијацијата на еврото во однос на доларот е :

1)

$$\text{Вредност (износ) на апресијација или депресијација на еврото} = \frac{\text{нова доларска вредност на еврото – претходната доларска вредност на еврото}}{\text{претходна доларска вредност на еврото}}$$

2) вредност на апресијација (депресијација) на валута X (€) $= \dfrac{e_1 - e_0}{e_0}$

2. Со замена во примерот (со $e_0 =$ $ 0,93 и $e_1 =$ $ 1,09) се добива 17,20% апрецијација на еврото. ♦

Алтернативно, може да се пресмета и промената на евро вредноста на доларот. Ако доларската вредност на еврото го означуваме со “e” (dollars per euro), тогаш евро вредноста на доларот (euros per dollar) мора да биде реципроцитет или „ 1/e”.

3. На пример, ако еврото вреди $ 0,93, тогаш доларот вреди EUR1,075 (1/0,93).♦

Промената на евровредноста на доларот помеѓу времето 0 и времето t изнесува $1/e_t - 1/e_0$. Изразено во проценти, се вели дека доларот депресирал (апресирал) во однос на еврото за дел од зголемувањето или од намалувањето на евро вредност на доларот.

3)

$$\text{Вредност (износ) на апресијација или депресијација на доларот} = \frac{\text{нова евро вредност на доларот – претходната евро вредност на доларот}}{\text{претходна евро вредност на доларот}}$$

4) вредност на апресијација (депресијација) на валута X ($)= $\frac{1/e_1 - 1/e_0}{1/e_0} = \frac{e_0 - e_1}{e_1}$

4. Со примена на равенката 3, се добива износот на зголемување на евро девизниот курс од $0,93 на $ 1,09, што преставува депресијација на доларот за 14,6% [(0,917–1,075) / 1,075 = –0,146]. ♦

Правило при пресметка на процентуалната промена на девизните курсеви со текот на времето:

- позитивната процентуална промена претставува апресијација на странската валута;
- негативната процентуална промена претставува депресијација на странската валута.

Слика 2

КУРСНА ЛИСТА
ЗА МЕНУВАЧКО РАБОТЕЊЕ

Курсна листа бр.__________

Курсевите важат од 08.00-20.00 на ден _________________200__година

ЗЕМЈА	ШИФРА	ОЗНАКА НА ВАЛУТА	ЗА	КУПОВЕН ЗА ЕФЕКТИВА	ПРОДАЖЕН ЗА ЕФЕКТИВА
ЕМУ	**978**	**EUR**	1		
АВСТРАЛИЈА	**036**	**AUD**	1		
КАНАДА	**124**	**CAD**	1		
ДАНСКА	**208**	**DKK**	100		
НОРВЕШКА	**578**	**NOK**	100		
ШВЕДСКА	**752**	**SEK**	100		
ШВАЈЦАРИЈА	**756**	**CHF**	100		
В.БРИТАНИЈА	**826**	**GBP**	1		
САД	**840**	**USD**	1		

Извор: Народна банка на Република Македонија

Од примерите може да се согледа дека промените на евро девизниот курс во однос на доларот не се еднакви со промените на доларскиот девизен курс во однос на еврото. Причината за тоа е следнава: евро апресијацијата не е еднаква со износот на депресијацијата на доларот, бидејќи вредноста на едната валута претставува инверзна вредност на другата валута. Според тоа, процентуалната промена на вредноста на валутите се разликува поради тоа, што се разликуваат базите врз основа на кои се врши пресметка на промените.

Задачи за самостојна работа

1. Објасни го поимот депресијација.

2. Што е девалвација?

3. Објасни го поимот апресијација.

4. Што е ревалвација?

5. Курсот евро/долар се променил во текот на денот од 1,45 на 1,53. Пресметај го процентот на промената на еврото (порастот на еврото), како и процентот на промената на вредноста на доларот.

6. Денарот ја смени вредноста во однос на еврото (еднократно) од 61,5 на 90. За каква промена станува збор и во колкав процент?

7*. Швајцарскиот франк апресира во однос на еврото за 4% (претходен курс EUR/CHF 1,33). Кој е моменталниот курс?

2. 6. Поим за девизи

Парите на една национална економија во странство (во друга земја), се јавуваат во два вида: во вид на **ефективни странски пари** или **валути (foreign currency)** и во вид на краткорочни побарувања во странски валути или **девизи (foreign exchange).**

Поимот девизи, произлегува етимолошки од новолатинскиот, односно шпанскиот збор „**devisa**" (странска меница, неговото примарно значење се поврзува со меница, што гласи на странска валута, односно што треба да биде наплатена во странство). Вообичаено девизите се нарекуваат „влезници за странските пазари" и тие се упатници на куповната сила во странство. Тоа значи дека странскиот девизен резидент, како корисник на побарувањата во странство, добива девизи кои што претставуваат побарувања во странска валута. Или, на пример, домашен резидент, како противвредност за реализиран извоз во странство, добива хартија од вредност, како девиза што гласи на странска валута каде извезувал и со истата може да купува стоки во странска земја.

Девизите, како краткорочни побарувања во странска валута претставуваат специфична стока што се купува и продава на девизниот пазар, како сегмент на финансискиот пазар. За имателот на девизите (домашен резидент) тие не претставуваат пари, бидејќи имателот ќе добие домашни пари, откако ќе ги продаде девизите на девизниот пазар или ќе ги презентира кај некоја банка за наплата.

Поимот девиза може да се дефинира во потесна и поширока смисла.

Според **потесната смисла**, девизата е краткорочно побарување во странска валута, настанато по која било основа и без оглед на начинот на располагање со него. Најголем број на земји ја прифаќаат оваа дефиниција за девизите.

Поширoката дефиниција на девизите, освен потесната дефиниција, ги опфаќа и ефективните странски парични средства со кои располаат домашните резиденти. Ова се оправдува со тврдењето дека странските валути претставуваат побарувања на домашните резиденти спрема централната банка, која ги емитувала овие парични средства.

Во Република Македонија прифатена е пошироката дефиниција на девизите, што значи дека под поимот девиза се подразбираат краткорочните побарувања во странство што гласат на странска валута и сите ефективни странски парични средства, освен кованите златни пари.

Тргнувајќи од фактот, дека девизите може да се користат во меѓународниот платен промет (служат како медиум за постигнување на меѓународна ликвидност), дека постојат различни можности за користење на побарувањата во странство (на девизите), во странски средства за плаќање и од начинот на утврдувањето на интервалутните вредности на одделните видови национални пари, девизите би можеле, од економско - политички аспект, да се групираат во две групи: слободни и врзани девизи.

Слободните девизи се дефинираат како побарувања во странство во такви видови странски средства за плаќање, со кои нивните сопственици би можеле да располагаат слободно за плаќање на побарувањата во земјата или за плаќање во некоја друга земја. Најчесто како синоним на слободните девизи се споменуваат конвертибилните, здравите или цврсти девизи.

Врзаните девизи гласат на краткорочни побарувања во странство, во странски средства за плаќање, побарувања што би можеле да се користат само за договорени видови плаќања. Кај врзаните девизи постои карактеристика на ограниченоста, што постои кај сопственикот на сите девизни побарувања при нивното користење. Како синоними на врзаните девизи најчесто се споменуваат неконвертибилните, слабите, меките или клириншките девизи.

Според првиот аспект, кој е поврзан со можноста за извршување на транферот на побарувањата на кои гласи валутата, слободни девизи се девизи, што гласат на конвертибилни валути и што можат да се конвертираат, да се претворат краткорочните побарувања во една валута во краткорочни побарувања во друга валута. Доколку девизите ја немаат оваа карактеристика, се нарекуваат врзани девизи. Односно, врзаните девизи се неконвертибилни побарувања. Тие неможат слободно да се користат за измирување на обврските по основа на меѓународна размена, туку се користат за извршување на договорените видови плаќања, меѓу две земји по договор. Фактички, ваквите девизи немаат слободен трансфер, ниту можат да се конвертират од еден во друг вид.

Од аспект на нивната способност за конверзија, можат да бидат: конвертибилни, неконвертибилни и клириншки девизи. **Конвертибилните девизи** се оние краткорочни побарувања што гласат на странска валута и што може да се заменуваат за други девизи или странски ефективни парични средства, врз основа на претходно утврден паритет. Конвертибилноста може да биде целосна или ограничена.

Доколку девизите не можат да се заменуваат за други девизи или ефективни странски парични средства, станува збор за **неконвертибилни девизи.**

Клириншки девизи се јавуваат во случаите на должничко - доверителни односи, врз основа на билатералните спогодби стекнати преку клириншкиот начин на плаќања. Позитивното салдо од ваквата размена може да се израмни само со купување во земјата - партнер, која остварила негативно клириншко салдо. Ова го оневозможува користењето на обврските на позитивното салдо од една земја, за измирување на обврските во размената со три земји.

Зависно од рокот на доспевање, девизите може да се поделат на **промптни и терминскиe.**

Промптните девизи (спот) се доспеани девизи, што можат да се наплатат веднаш, при што мора да се внимава на режимот на користењето на конкретната девиза, што зависи од нејзиниот вид.

Терминските девизи не се доспеани, односно неможат да се наплатат веднаш, туку треба да се чека да помине одреден временски период што е однапред договорен. Најчесто терминските девизи се купуваат заради обезбедување од курсниот ризик или пак од чисти шпекулативни мотиви, со цел да се заработи на разликите во курсот.

Задачи за самостојна работа

1. Дефинирај го поимот девиза во потесна и поширока смисла на зборот.

2. Објасни ја разликата помеѓу валути и девизи

3. Поделба на девизи од аспект на конвертибилноста.

4. Објасни ги промптните и терминските девизи.

5. Клирингшки девизи, поим и значење.

2. 7. Поим и суштина на девизниот курс

Девизниот курс, претставува цена на една единица странска валута изразена во домашни пари.

Според тоа, секоја странска, валута односно краткорочно побарување, што гласи на странска валута, на домашниот пазар претставува девиза и има своја цена т.е. девизен курс.

Девизниот курс треба да се разликува од девизниот (валутниот) паритет, што претставува званично утврдена вредност на националните пари, искажани во некој пошироко прифатен именител (деноминатор): злато, некоја стабилна и важна валута и сл. Во нормални прилики, девизниот курс се движи околу девизниот паритет, како основа.

Всушност, девизниот курс претставува цена на домашната валута изразена во странска валута, односно колку единици на домашна валута треба да се дадат за единица странска валута. Кога курсот се изразува на ваков начин, станува збор за т.н. систем на **директно котирање**.

Системот на индиректно котирање, го применува само Велика Британија (и нејзини поранешни колонии), каде што девизниот курс се дефинира како број на единици на странска валута, кој треба да се даде за единица домашна валута. [1]

Номинален девизен курс претставува цена на домашната валута изразена во странска валута, без вкалкулирање на стапката на инфлацијата (не се зема во предвид стапката на инфлација).

Реален девизен курс е номинален девизен курс, корегиран со стапката на инфлација и тој е многу важен, бидејќи инфлацијата ја обезвреднува вредноста на валутата, т.е. ја намалува нејзината куповна моќ. Со корекција на номиналниот курс

---

[1] Девизниот курс се нотира директно кога во домашна валута се изразува цената на 1 или 100 странски валути (1 EUR = 61 денар) или индиректно кога девизниот курс се изразува како цена на 1 или 100 единици на домашна валута во странски валути (100 денари = 1,80 EUR).

со стапката за инфлација, се добива реална слика на куповната моќ на адекватаната валута.

Ефективен девизен курс е пондериран просек на девизните курсеви помеѓу домашната валута и валутата на земјата, која е наш значаен трговски партнер.

Бидејќи постои можност за фалсификување на ефективните пари, во практика банките посебно ја покажуваат висината на **девизниот курс за ефектива,** кој по правило е понизок од курсот на девизите, поради можноста за фалсификување на парите и поради манипулативните трошоци за пренос од земја во земја.

Секоја меѓународна трансакција се состои од две купувања: купување на предметот на меѓународна размена и купување на валута. Тоа значи дека увозникот од земјата X, ако увезува стока од земјата У, тој не купува само стока, туку мора да купи и валута од земјата У. Така доаѓаме до заклучок, дека во меѓународната размена се формираат и цени на поодделните национални валути, а не само цени на предметот на меѓународната размена.

Тоа можеме да го прикажеме преку следниве релации:

а) за извозот: $Ei = Qi \cdot pi \cdot T$ односно, вредноста на извозот на определена стока е еднаква на производот на количината на стоката, цената постигната на странскиот пазар на девизи и курсот на странската валута.

б) за увоз: $\mathrm{U}i = Qi \cdot pi \cdot T \ \ (1+ti)$ односно, вредноста на увозот на некоја стока е еднаква на производот на количината на таа стока со нејзината цена на пазарот на набавка и курсот на девизата со која се плаќа, зголемена за увозните давачки $(1+ti)$.

Понекогаш, девизните и валутните курсеви се означуваат со заедничко име, **интервалутен курс**.

Интервалутниот курс претставува цена, по која се врши размена на ефективните пари на една земја за ефективните пари на друга земја.

Секоја валута има свој паритет, односно свој валутен курс, што претставува појдовна точка во определувањето на интервалутните односи.

Девизните курсеви се формираат на девизен пазар под влијание на понудата и побарувачката на девизи. Понудата и побарувачката за девизи ја отсликуваат состојбата во платниот биланс. Дефицитот во платниот биланс значи дека побарувачката за девизи е поголема од понудата. Суфицитот во платниот биланс значи дека понудата за девизи е поголема од побарувачката.

Задачи за самостојна работа

1. Што претставува дезиниот курс?

2. Објасни директна котација.

3. Објасни индиректна котација.

4. Номинален, реален и ефективен девизен курс, поим и значење.

5. Што е интервалутен курс?

2. 8. Спот транскации

Основна транскација на девизниот пазар е **спот договорот.**

Спот трансакција е купување или продажба на една валута за друга, со рок на испорака два работни дена после датата на тргувањето - дилингот (датата кога е направен контактот). Ова овозможува да се подготват потребните документи за трансакцијата и да се организира готовинскиот трансфер.

Спот трансакцијата е моментална размена на една валута за друга. **Спот девизен курс** е моменталниот (тековен) курс или пазарна цена, цена за споредба. Спот трансакциите не значат дека веднаш се вршат плаќањата (исплатите). Според конвенција, дата на исплата или дата на вредноста (settlement date, value date) е вториот работен ден после датата на тргувањето (second business day after the „deal date" or „trade date") кога трансакцијата е договорена од двата дилери. Периодот од два дена обезбедува доволно време за двете договорни страни да го потврдат договорот и да договорат порамнување (клиринг или потребните задолжувања и одобрувања на банкарски сметки на различни локации.

Како исклучок, спот трансакциите помеѓу канадскиот долар (CAD) и САД доларот (USD), конвенционално се исплатуваат еден работен ден после тргувањето (поради тоа што Канада и САД се во иста временска зона).

Да повториме, спот важи два работни дена после датата на тргувањето.

Спот трансакциите претставуваат директна размена на една валута за друга и кога ќе се извршат, следува трансферот преку системот за плаќања на двете земји, чии валути се инволвирани.

Во типична спот трансакција, Банка А од Њујорк договара на 1 јуни да продаде 10 милиони долари за евра на Банка Б во Франкфурт, по курс, да речеме 0,785 EUR за долар, со вредност од 3-ти јуни. На 3-ти јуни, Банка Б ќе плати 7,85 милиони EUR на сметка на Банка А во Германија, а Банката А ќе плати 10 милиони долари на сметка на Банката Б во САД. Со извршувањето на двете плаќања се комплетира трансакцијата.

На девизниот пазар постојат **две цени за секоја валута**- една цена по која продавачите на одредена валута сакаат да продадат и друга цена по која купувачите сакаат да купат (куповен и продажен курс). Од маркет-мејкерот се очекува да ги котира за своите комитенти двата курса, со што го „прави пазарот” (making a market).

Кај спот курсевите важно е да се знае како истите котираат, односно термините директна и индиректна котација, европски и американски услови и сл.

Котирањето на девизниот курс, како цена на една валута во однос на друга, се јавува во две форми: директна котација која претставува износ на домашна валута (пр. долари, ако сте од САД или денари, ако сте од Македонија) за единица на странска валута и второ, како индиректна котација која претставува единица на странска валута за единица на домашна валута (во долари, ако сте од САД или во денари, ако сте од Македонија).

Фразата „американски услови” („American terms”) значи котирање од гледна точка на некој лоциран во САД, односно, за долар, тоа значи дека курсот е котиран во варијабилен износ на долари (USD) за една единица на странска валута (пр. 1,27 за EUR).

Фразата „европски услови” значи директна котација од гледна точка на некој лоциран во Европа. За доларот, тоа значи варијабилен износ на странска валута за еден USD (или EUR 0,785 за $1).

Кога во 1978 година, девизниот пазар се интегрираше во единствен глобален пазар, заради олеснување, практиката на пазарот во САД се смени, по иницијатива на брокерите, за да се усогласи со европските конвенции.

Така ОТЦ пазарот во сите земји сега ги котира доларите по европски услови, спроти речиси сите други валути (значи, износ на странска валута за $1). Тоа значи дека доларот е речиси секогаш базна валута (base currency), една единица ($1) се купува или продава за варијабилен износ на странска валута.

Постојат исклучоци од ова генерално правило, поточно на сите ОТЦ пазари во светот, фунтата продолжува да се котира како базна валута. Оттука, маркет-мејкерите и брокерите насекаде во светот ја котираат фунтата стерлинг (GBP) за x долари за фунта. Велика Британија не го усвои децималниот валутен систем се до 1971 година и беше полесно математички да се котира и тргува по услови на варијабилни износи на странска валута за фунта, отколку спротивно. Одредени валути, кои историски се поврзани со GBP, (валути на Ирска, Австралија и Нов Зеланд), котираат на ОТЦ пазарот на ист начин како и фунтата (варијабилен износ на евра за една единица).

Директните и индиректни котирања се реципрочни и лесно се утврдуваат еден од друг.

Секоја девизна трансакција опфаќа две валути и тука е важно да се знае која е **базната валута** (Base Currency, котирана, фиксирана) и која е **условната валута** (Terms Currency) или пресметувачка (counter currency).

По правило, девизниот курс (exchange rate) помеѓу две валути, на пример USD и JPY се пишува USD/JPY и се однесува на бројот на JPY кој е еднаков на 1 USD, додека JPY/USD се однесува на број на USD еднаков на 1 JPY.

Кодот на валутата напишан на левата страна е базна валута и секогаш е единица.

Кодот на валутата напишан на десната страна е варијабилна валута (условна, пресметувачка единица или котирана валута). Бројот на единици на таа валута е еднаков на една единица на базната валута, согласно курсот.

Секогаш се пишува базната валута на левата страна. Соодноc NOK/DKK, на пример, значи број на DKK за NOK.

1. Курсот CHF/DKK е 4,1235. Ако купиме CHF 1 милион, наспроти DKK, колку DKK треба да платиме? Бројот 4,1235 значи број на DKK за 1 CHF. Оттука, треба да платиме ДКК 4 123 500:

$1\,000\,000 \cdot 4{,}1235 = 4\,123\,500.$ ♦

2. Ако наместо претходната трансакција, сакаме да купиме DKK 1 милион за CHF, колку CHF треба да платиме (курсот CHF/DKK е 4,1235)? Во тој случај тоа е CHF 242 512,43:

$1\,000\,000 : 4{,}1235 = 242\,512{,}43.$ ♦

Варијабилната валута е броител, а базната валута именител. Кога броителот расте, базната валута зајакнува и станува поскапа. Кога броителот се намалува, базната валута слабее и станува поефтина. Базната валута секогаш се кажува прва, во говорната комуникација.

Котацијата долар/јен (USD/JPY) значи дека доларот е базна валута и именител, а јенот е варијабилна и именител. Некои од валутите имаат и прекари (фунта - Cable, швајцарски франк- Swissie, австралиски долар - Aussie). Cable е прекар за GBP/USD курс.

Курсевите кои ги котира маркет-мејкерот се секогаш од негова точка на гледање (куповен курс, по кој тој купува една единица базна валута и продажен, по кој тој продава за единица базна валута).

Маркет-мејкер прашан за курсот USD/CHF може да одговори 1,4975-85, со што кажува дека куповен курс за CHF е 1,4975 за долар и продажна цена од CHF 1,4985 за долар. Обично, маркет мејкерот едноставно котира 75-85, односно претпоставува дека комитентот знае дека големата бројка („big figure") е 1,49. Куповниот курс е секогаш прв, од лева страна и е понизок од продажниот курс (од десна страна). Разликата се нарекува маржа (spread).

Куповниот и продажниот курс се изразуваат во четири децимали, односно стоти дел од 1% или 1/10 000 од варијабилната валута и се нарекува *пипс*. Кај некои валути, кои имаат мала апсолутна вредност, како јенот, може да се котира со две децимали и пипс е 1/100 од варијабилната валута. На секој пазар пипс или тик е најмалиот износ на промена на цената .

Задачи за самостојна работа

1. Што е спот трансакција?

2. Објасни спот девизен курс?

3. Што е базна, а што условна валута?

4. Купуваме 100 000 EUR со долари (курсот е EUR/USD 1,44). Колку долари треба да платиме?

5*. Купуваме 100 000 USD со евра (курсот EUR/USD 1,46). Колку евра треба да платиме?

2. 9. Како котираат спот курсевите

Кога котираат спроти еврото (EUR), пракса е на меѓубанкарскиот пазар да се котираат повеќето валути, во услови на различен број на единици на валути, за 1 EUR. Со други зборови, EUR е базна валута, доколку една или две валути се опфатени.

Слично, покрај EUR, како меѓубанкарски договор е да се котираат сите валути спрема USD како базна валута.

Иако дилингот е можен помеѓу било кои две конвертибилни валути, пример, NZD спрема EUR или CHF спрема JPY, меѓубанкарскиот пазар, историски најмногу котира спрема USD, со што се редуцира бројот на индивидуални курсеви кои треба да се котираат. Девизните курсеви помеѓу било кои две не-USD валути можат да се пресметаат од курсот на секоја валута наспроти USD.

Курсевите помеѓу било кои две не-USD валути се познати како **вкрстени курсеви (cross-rate).**

Денес терминот вкрстени курсеви се користи како израз за било кои девизни курсеви, кои се пресметани од други два курса, на пример, GBP/SEK курс може да се пресмета со комбинирање на EUR/GBP курс и EUR/SEK курс.

Тргување со вкрстени курсеви (Cross Rate Trading) претставува размена на валути, во кои доларот не е ниту базична ниту варијабилна валута, пр. EUR/JPY (EUR-базна, JPY- варијабилна).

Како и на другите пазари, банките нормално котираат две цени, кои покажуваат до кое ниво тие се подготвени да купуваат базна валута наспроти варијабилната (куповен курс – **bid-** за базната валута е понискиот курс) и ниво за кое е подготвена да продава базна валута за варијабилната валута (продажен курс, **offer (ask)**- на базната валута, односно повисокиот курс).

3. Ако банката е подготвена да купи USD за 1,4375 CHF и продаде USD за 1,4385 CHF, USD/CHF курсот ќе котира како 1,4375/1,4385. ♦

Разликата помеѓу двете страни на котацијата е позната како маржа („spread”).

Bid е цената од лево, по која банката која котира ја купува базната валута. Offer е цената од десно, по која банката која котира ја продава базната валута. Спред е разликата помеѓу bid и offer (куповниот и продажниот курс).

Постојат и **реципрочни курсеви**. Било која котација на одредена валута како базна валута, може да биде конвертирана во еквивалентна котација, со валута како варијабилна валута, со нејзина реципрочна вредност.

4. USD/CHF котацијата од 1,4375/1,4385 може да се конвертира во CHF/USD котација од (1:1,4375)/(1:1,4385). Како и да е, тие сепак можат да бидат котирани со помалиот број од лева страна, така што две страни на котацијата се спротивни: 0,6952/0,6957. Во друг случај, банката купува базна валута наспроти варијабилната валута од лева и продава базна валута за варијабилна од десна. ♦

Курсевите типично се котираат како $\frac{1}{100}$ (стоти дел) од центот.

Овој износ е познат како поинт или пип (поен или пип). На пример, USD/CHF курсот обично ќе котира како четири децимален број - 1,4375/1,4385. Ова зависи од големината на броевите и во случајот на USD/JPY, на пример, договор е да се користат 2 децимали. Во USD/JPY котацијата е 105,05/105,15, каде 15 поени значи 0,15 JPY, а во двата случаеви, еден поен е онаа единица на последниот котиран децимален број.

5. Кога се тргува со USD/CHF во износ од УСД 1 милион, вредноста на еден поен е CHF 100. Со други зборови, CHF 100 е големина на профитот или загубата направена од дилот, ако девизниот курс се помести за еден поен:

1 000 000 · CHF 0,0001 = CHF 100. ♦

Поен (point) е една единица од последната децимала од девизниот курс. Девизниот курс обично котира во поени или пипсови, најчесто со последните две децимали. Големите бројки (big figure) се првиот дел од девизниот курс, без поените.

Задачи за самостојна работа

1. Објасни куповен - продажен курс?

2. Што се вкрстени курсеви?

3. Што е пипс?

4. Што е спред (маржа)?

5*. Курсот EUR/USD е 1,44 - 1,46. Прикажи го реципрочниот курс.

2. 10. Профит и загуба

За да се оствари профит од дилингот, целта на банката е да ја продаде базната валута, по највисок курс што е можно наспроти варијабилната валута и да ја купи базната валута по најниска цена.

1. Курсот USD / CHF е 1,483/1,485

Трговија 1: Банката купува USD 1 000 000 за CHF по 1,4830

Трговија 2: Банката продава USD 1 000 000 за CHF по 1,4855

Паричен тек (cash flows)

	USD	CHF
Трговија 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 483 000
Трговија 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 485 500
Нето резултат:		+ CHF 2 500

Банката направила профит од CHF 2 500. ♦

2. Купуваме USD 1 милион за CHF кога спот USD/CHF е 1,5835. Подоцна, истиот ден, ја затвораме својата позиција со продавање на USD 1 милион кога спотот USD/CHF е 1,5836. Со тоа оствауваме профит од 1 поен.

Паричен тек (cash flows)

	USD	CHF
Трговија 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 583 500
Трговија 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 585 600
Нето резултат:		+ CHF 100

Оттука, вредноста на 1 поен на USD/CHF во дил со USD 1 милион изнесува CHF 100.♦

3. Купуваме USD 1 милион за JPY кога спот курсот е USD/JPY е 118,35. Подоцна, истиот ден, ја затвораме позицијата со продавање на USD 1 милион, повторно кога спот цената USD/JPY е 118,36. Со тоа остваруваме профит од 1 поен.

Паричен тек (cash flows)

	USD	JPY
Трговија 1:	+ USD 1 000 000	- JPY 118 350 000
Трговија 2:	- USD 1 000 000	+ JPY 118 360 000
Нето резултат:		+ JPY 10 000

Оттука, вредноста на 1 поен на USD/JPY во дил со USD 1 милион изнесува JPY 10 000. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Курсот EUR/CHF е 1,32 - 1,34. Ако по курс се купени и продадени 20 000 CHF со дадениот спред, колкав профит е остварен?

2*. Физичко лице купило 10 000 EUR по продажен курс од 61,70 МКД. После извесен период ги продало 10 000 EUR по куповен курс од 61,40 МКД. Кој е нето-резултатот?

2. 11. Одржување на позиција

Во секое време дилерот треба да знае која е неговата позиција (одржување на позиција-position keeping) – нето резултатот на сите негови тргувања, кои ги направил во текот на денот. Тој, исто така, треба да знае кој е **просечниот девизен курс** за неговата нето-позиција, така да може да го спореди со тековниот девизен курс на пазарот, за да види дали неговата позиција е профитабилна или не. На крајот од денот, тој не мора да ја затвори позицијата, но во тој случај е потребно да направи **marking to market** на позицијата, односно да го пресмета **неостварениот профит или загуба** на позицијата до сега. Тоа се постигнува преку пресметување колкав треба да биде профитот или загубата, ако вие фактички ја затворите позицијата по тековната стапка (current rate), односно на крајот на денот.

1. Сте преземале 3 спот тргувања за USD/CHF според следното:

Продажба на USD 4 милиони по 1,6723

Купување на USD 1 милион по 1,6732

Купување USD 5 милиони по 1,6729

Пазарот затвора по курс USD/CHF 1,6730.

Каква е вашата позиција? Кој е просечниот курс за таквата позиција? Колкав е Вашиот нето профит или загуба?

	USD	CHF
	– 4 000 000 по 1,6723	+ 6 689 200
	+ 1 000 000 по 1,6732	– 1 673 200
	+ 5 000 000 по 1,6729	– 8 364 500
Позиција	+ 2 000 000	– 3 348 500

Просечна стапка: $\frac{3\ 348\ 500}{2\ 000\ 000} = 1{,}67425$

	– 2 000 000 по 1,6730:	+ 3 346 000
Загуба:		–2 500

Позицијата е повеќе купени USD 2 милиони. Просечна стапка е 1,67425, загубата е CHF 2 500. Загубата може да биде изразена и во USD со конверзија во USD по спот курсот, или во било која валута, со конверзија по соодветна спот стапка. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Во 10 часот спот курсот EUR/NOK е 7,44 (котацијата е за 100 NOK). Продаваме NOK 500 000 по тој курс, а во 14 часот курсот EUR/NOK е 7,66. Во 19 часот следува нова промена на курсот и тој изнесува EUR/NOK 7,35. Прикажи ги профитот или загубата во двата термини.

2. Сте преземале 3 спот тргувања за USD/CHF според следното:

Купени CHF 100 000 по USD/CHF 1,041

Продадени CHF 200 000 по USD/CHF 1,038

Купени CHF 300 000 по USD/CHF 1,039

Пазарот затвора по USD/CHF 1,045

Каква е вашата позиција? Кој е просечниот курс за таквата позиција? Колкав е вашиот нето профит или загуба?

3. Куповен курс на менувачницата за USD е 49.50 а продажен курс е 50,00 МКД. Колку е заработката на купени и продадени 200 USD?

4. Купени се 100.000 EUR со USD по курс EUR/USD 1,40. Сега курсот EUR/USD е 1,23. Колкава е загубата ако сега се продадат еврата?

5. Купени се 10.000 AUD, по курс EUR/AUD 1,44 во 10 часот. Во 12 часот курсот е 1,45, а во 15 часот 1,437. Кога требало да се продадат австралиските долари за да се оствари профит?

2. 12. Задачи за вежбање

1. Изрази ја, на англиски начин, финоста на златото од $820‰$.

2. Изрази ја, на промилен начин, финоста на злато $W\,7,,2,4$.

3. Изрази ја, на промилен начин, финоста на сребро $W\,10,,12$.

4. Сребрен предмет има маса $600g$ и содржи $480g$ чисто сребро. Изрази ја финоста на среброто на:

а) промилен начин; б) англиски начин.

5. Златен предмет со финост $B1,,2$ има маса $120g$. Колкава е вкупната маса?

6. Сребрен предмет со финост $750‰$ содржи $222g$ чисто сребро. Колкава е вкупната маса?

7*. Пресметај ја финоста на легура на злато направена од $500g$ злато со финост $900‰$ и $750g$ злато со финост $850‰$.

8*. Пресметај ја финоста на легура од сребро направена од $100g$ чисто сребро, $100g$ бакар и $500g$ сребро со финост 204 пенивејти.

9. Курсот долар/франк се променил во текот на денот од 1,21 на 1,23. Пресметај го процентот на промената на доларот (порастот на доларот), како и процентот на промената на вредноста на франкот.

10. Денарот ја смени вредноста во однос на доларот, постепено од 61,5 на 75. За каква промена станува збор и во колкав процент?

11. Еврото апресира во однос на швајцарскиот франк за 5% (претходен курс EUR/CHF 1,33). Кој е моменталниот курс?

12. Во 10 часот спот курсот EUR/USD е 1,44. Продаваме USD 5 000 по тој курс, а во 14 часот курсот EUR/USD е 1,46. Во 19 часот следува нова промена на курсот и тој изнесува EUR/USD 1,43. Прикажи ги профитот или загубата во двата термини.

13*. Сте преземале 3 спот тргувања за EUR/AUD според следното:

Купени AUD 100 000 по 1,622
Продадени AUD 300 000 по 1,632
Купени AUD 600 000 по 1,641
Пазарот затвора по 1,635

Каква е вашата позиција? Кој е просечниот курс за таквата позиција? Колкав е вашиот нето профит или загуба?

Тематски преглед

Елементите злато, сребро, платина, жива, рутениум, родиум осмиум, паладиум и иридиум познати се како **благородни метали**.

Смесата од два или повеќе метали се нарекува **легура**. Масата на благородниот метал легурата уште ќе ја викаме и **чиста маса**, додека масата на легурата ќе ја викаме **вкупна маса**.

Односот на масата на благородниот метал (чистата маса) и масата на легурата (вкупната маса) се нарекува **финост** на благородниот метал. Изразувањето на финоста на благородниот метал се врши на два начина: **промилен** и **англиски**.

Ако ја означиме вкупната маса со m, чистата маса со m_b и финоста со f тогаш изразувањето на финоста на промилен начин е по формулата:

$$\boxed{f = \frac{m_b}{m} \cdot 1000\ ‰}$$

Според англискиот начин на изразување, финоста се изразува во **карати**, а финоста на среброто во **пенивејти**.

Златото со финост 22 карати се нарекува **стандард злато**, а среброто со финост 222 пенивејти **стандард сребро**. Ако златна (сребрена) легура е подобра од стандард злато (сребро), се користи ознака B (од англ. Better – подобар), односно W (од англ. Worse – полош) ако е полоша.

Валутата, како парична единица ја чини основата на монетарниот систем на една земја, претставува со закон определена единица што служи како основно мерило на вредноста во една земја.

Кога се зголемува општото ниво на продуктивноста во една земја, куповната моќ на националната валута на домашниот пазар расте, иако не дошло до измени во нејзината официјална вредност. Оваа појава се нарекува **апресијација** на валутата.

Во спротивен случај, кога доаѓа до опаѓање на куповната моќ на националната валута на домашниот пазар, без измена на официјалниот курс, таквата појава се нарекува **депресијација.**

Девалвацијата претставува еднostран и еднократен акт на монетарната власт, со што се врши намалување на интервалутарната вредност на националната валута.

Ревалвацијата претставува еднострaн и еднократен акт на монетарната власт, со што се врши зголемување на интервалутарната вредност на националната валута.

Парите на една национална економија во странство (во друга земја), се јавуваат во два вида: во вид на **ефективни странски пари** или **валути** и во вид на краткорочни побарувања во странски валути или **девизи**.

Под поимот **девиза** се подразбираат краткорочните побарувања во странство што гласат на странска валута и сите ефективни странски парични средства, освен кованите златни пари.

Девизите би можеле, од економско - политички аспект, да се групираат во две групи: **слободни** и **врзани девизи**. Од аспект на нивната способност за конверзија, можат да бидат: **конвертибилни**, **неконвертибилни** и **клириншки девизи**. Зависно од рокот на доспевање, девизите може да се поделат на **промптни и термински**.

Девизниот курс, претставува цена на една единица странска валута изразена во домашни пари. Всушност, девизниот курс претставува цена на домашната валута изразена во странска валута, односно колку единици на домашна валута треба да се дадат за единица странска валута. Кога курсот се изразува на ваков начин, станува збор за т.н. систем на **директно котирање**. Според **системот на индиректно котирање**, девизниот курс се дефинира како број на единици на странска валута, кој треба да се даде за единица домашна валута. **Номинален девизен курс** претставува цена на домашната валута изразена во странска валута, без вкалкулирање на стапката на инфлацијата. **Реален девизен курс** е номинален девизен курс, корегиран со стапката на инфлација. **Ефективен девизен курс** е пондериран просек на девизните курсеви помеѓу домашната валута и валутата на земјата, која е наш значаен трговски партнер. Бидејќи постои можност за фалсификување на ефективните пари, во практика банките посебно ја покажуваат висината на **девизниот курс за ефектива**.

Секоја меѓународна трансакција се состои од две купувања: купување на предметот на меѓународна размена и купување на валута. Во меѓународната размена се формираат и цени на поеделните национални валути, а не само цени на предметот на меѓународната размена. Тоа можеме да го прикажеме преку следниве релации:

а) за извозот: $Ei = Qi \cdot pi \cdot T$ односно, вредноста на извозот на определена стока е еднаква на производот на количината на стоката, цената постигната на странскиот пазар на девизи и курсот на странската валута.

б) за увоз: $\mathrm{U}i = Qi \cdot pi \cdot T \ \ (1+ti)$ односно, вредноста на увозот на некоја стока е еднаква на производот на количината на таа стока со нејзината цена на пазарот на набавка и курсот на девизата со која се плаќа, зголемена за увозните давачки $(1+ti)$.

Понекогаш, девизните и валутните курсеви се означуваат со заедничко име, **интервалутен курс**. Интервалутниот курс претставува цена, по која се врши размена на ефективните пари на една земја за ефективните пари на друга земја.

Спот трансакција е купување или продажба на една валута за друга, со рок на испорака два работни дена после датата на тргувањето - дилингот (датата кога е направен контактот). Ова овозможува да се подготват потребните документи за трансакцијата и да се организира готовинскиот трансфер.

Спот девизен курс е моменталниот (тековен) курс или пазарна цена, цена за споредба.

Спот трансакциите претставуваат директна размена на една валута за друга и кога ќе се извршат, следува трансферот преку системот за плаќања на двете земји, чии валути се инволвирани.

На девизниот пазар постојат **две цени за секоја валута** - една цена по која продавачите на одредена валута сакаат да продадат и друга цена по која купувачите сакаат да купат (куповен и продажен курс). Кај спот курсевите важно е да се знае како истите котираат, односно термините директна и индиректна котација, европски и американски услови и сл.

Котирањето на девизниот курс, како цена на една валута во однос на друга, се јавува во две форми: **директна котација** која претставува износ на домашна валута за единица на странска валута и второ, како **индиректна котација** која претставува единица на странска валута за единица на домашна валута.

Секоја девизна трансакција опфаќа две валути и тука е важно да се знае која е **базната валута** и која е **условната валута**.

Курсевите помеѓу било кои две не-USD валути се познати како **вкрстени курсеви**.

Постојат и **реципрочни курсеви**. Било која котација на одредена валута како базна валута, може да биде конвертирана во еквивалентна котација, со валута како варијабилна валута, со нејзина реципрочна вредност.

Поен е една единица од последната децимала од девизниот курс.

Во секое време дилерот треба да знае кој е **просечниот девизен курс** за неговата нето-позиција, така да може да го спореди со тековниот девизен курс на пазарот, за да види дали неговата позиција е профитабилна или не. На крајот од денот, тој не мора да ја затвори позицијата, но во тој случај е потребно да го пресмета **неостварениот профит или загуба** на позицијата до сега. Тоа се постигнува преку пресметување колкав треба да биде профитот или загубата, ако вие фактички ја затворите позицијата по тековната стапка, односно на крајот на денот.

3. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

3. 1. Поим за степен со реален показател

Во твоето досегашно изучување на математиката се запозна со поимите степен на позитивен реален број a во случај кога степеновиот показател е природен број, цел број или рационален број. Да се потсетиме.

1. Изврши ги означените операции со степени:

а) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}:x^{-0,5}$ б) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$ в) $9^{-\frac{1}{2}}+0,25^{-\frac{3}{2}}$

Од дефиницијата на степен со рационален показател и својствата на степен со рационален показател имаме:

а) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}:x^{-0,5}=x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-(-0,5)}=x^{\frac{23}{12}}$

б) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=x-y$

в) $4^{\frac{1}{2}}+0,25^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{4}+\frac{1}{\sqrt{0,25^3}}=2+\frac{1}{0,125}=2+8=10$

Во оваа лекција ќе дефинираме степен со реален показател, кој претставува проширување на дефиницијата за степен со рационален показател и ќе се запознаеме со неколку основни својства на степените со реален показател.

За секој реален број x и секој позитивен реален број a е определен степен со реален показател a^x на следниот начин.

I. Ако $x>0$ и

1. $x=n,$ тогаш $a^x=\begin{cases} a & \text{за } n=1 \\ \underbrace{aa...a}_{n} & \text{за } n>1 \end{cases}$

2. $x=\frac{1}{n},$ тогаш $a^x=\sqrt[n]{a}$

3. $x=\frac{k}{n},\ k\in\mathbb{N},$ тогаш $a^x=\sqrt[n]{a^k}$

4. $x=c_0,c_1c_2...c_n...,$ тогаш

а) за $a>1,$ имаме $a^{c_0,c_1c_2...c_n}<a^{c_0,c_1c_2...c_n...}<a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}$

б) за $0<a<1,$ имаме $a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}<a^{c_0,c_1c_2...c_n...}<a^{c_0,c_1c_2...c_n}$

в) за $a=1,$ имаме $a^x=1$

II. Ако $x=0$ тогаш $a^x=1$

III. Ако $x<0$ тогаш $a^x=\frac{1}{a^{|x|}}$

2. а) Согласно горната дефиниција на степен со реален показател изразот 5^{-x}, за $x > 0$, има смисла, бидејќи $a = 5 > 0$, додека изразот $(-5)^{-x}$, за $x > 0$, нема смисла, бидејќи $a = -5 < 0$.

б) Изразите 0^{-x}, за секое $x \in \mathbb{R}$, и 0^{x}, за секое $x \in \mathbb{R}$, немаат смисла бидејќи $a = 0$. ♦

За степен на позитивен реален број a со реален показател важат следниве својства:

1. $a^x = b^x$, за секое $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако $a = b$

2. За секој $x \in \mathbb{R}$ постои единствен степен a^x

3. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ за секои $x, y \in \mathbb{R}$

4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ за секои $x, y \in \mathbb{R}$

5. $(ab)^x = a^x b^x$ за секое $x \in \mathbb{R}$

3. Непосредно од дефиницијата на степен со реален показател и погорните својства следува дека

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = (ab^{-1})^x = a^x (b^{-1})^x = a^x b^{-x} = \frac{a^x}{b^x}. \ ♦$$

4. Изврши ги означените операции со степените:

а) $3^x 4^x$; б) $4^z : 2^z$; в) $(8^x 9^y 15^z) : (2^x 3^y 5^z)$.

Имаме

а) $3^x 4^x = (3 \cdot 4)^x = 12^x$; б) $4^z : 2^z = \left(\frac{4}{2}\right)^z = 2^z$;

в) $(8^x 9^y 15^z) : (2^x 3^y 5^z) = \left(\frac{8}{2}\right)^x \left(\frac{9}{3}\right)^y \left(\frac{15}{5}\right)^z = 4^x 3^y 5^z$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Како се дефинира степен со реален показател?

2. Изврши ги означените операции со степените:

а) $2^x 2^y$; б) $2^x : 4^x$; в) $12^x 11^x$; г) $(2^x 5^x)^y$.

3. Спореди ги степените:

а) 3^x и $9^{x/2}$; б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$.

4*. Кој од броевите е поголем во дадените неравенства, x или y?

а) $0{,}4^x > 0{,}4^y$; б) $1{,}4^x > 1{,}4^y$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$.

5. Изврши ги операциите:
а) $(2^x + 3^x)(2^x - 3^x)$; б) $(5^x - 5^{-x})^2$; в) $(4^x + 1)^3$.

3. 2. Експоненцијални равенки

Дефиниција 1. Равенки кај кои непознатата се наоѓа во степеновиот показател се нарекуваат **експоненцијални равенки**.

1. Експоненцијални равенки се, на пример, равенките:

$$2^x = 8,\quad 4^{x-3} = x - 2,\quad 2{,}3^{x+3} = 5\cdot 3^x + 49 \quad \text{и} \quad x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3.\ \blacklozenge$$

Во продолжение ќе решиме некои видови експоненцијални равенки.

I. Равенки од видот $A^x + m = 0,\ A > 0,\ A \neq 1,\ m < 0$

2. Реши ја равенката $3^x = 27$.

Дадената равенка $3^x = 27$ ја запишуваме во облик $3^x = 3^3$, при што добиваме равенка еквивалетна на дадената. Потоа ќе искористиме едно од својствата на степен на позитивен реален број a со реален показател, имено:

$a > 0,\ a \neq 1,\ a^{x_1} = a^{x_2}$ ако и само ако $x_1 = x_2$.

Во таа смисла $3^x = 3^3$ ако и само ако $x = 3$, од каде што заклучуваме дека равенката $3^x = 27$ има единствено решение $x = 3$. ♦

3. Реши ги равенките:

а) $4^x = \frac{1}{16}$ б) $5^x = 1$ в) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125}$.

$4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ $5^x = 5^0$ $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^3$

$4^x = 4^{-2}$ $x = 0$ $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$

$x = -2$ $x = -3.$ ♦

II. Равенки од видот $A^{f(x)}+m=0$, $A>0$, $A\neq1$, $m<0$

4. Реши ги равенките:

а) $3^{x+5}=81$	б) $2^{3x-1}=32$	в) $3^{x^2}=81$.
$3^{x+5}=3^4$	$2^{3x-1}=2^5$	$3^{x^2}=3^4$
$x+5=4$	$3x-1=5$	$x^2=4$
$x=-1$	$x=2$	$x=\pm2$. ♦

III. Равенки од видот $a(A^{f(x)})^2+bA^{f(x)}+c=0$

Со смената $A^{f(x)}=t$ ја добиваме квадратната равенка $at^2+bt+c=0$. За секое решение на квадратната равенка ја решаваме експоненцијалната равенка $A^{f(x)}=t$.

5. Реши ги равенките:

а) $2^{2x}-6\cdot2^x+8=0$	б) $16^x-3\cdot4x+2=0$	в) $12\sqrt[2x]{81}-\sqrt[x]{81}=27.$
$(2^x)^2-6\cdot2^x+8=0$	$(4^x)^2-3\cdot4x+2=0$	$12\sqrt[2x]{81}-\left(\sqrt[2x]{81}\right)^2=27$
смена $2^x=t$	смена $4^x=t$	смена $\sqrt[2x]{81}=t$
$t^2-6t+8=0$	$t^2-3t+2=0$	$12t-t^2=27$
$t_1=8, t_2=2$	$t_1=2,\ t_2=1$	$t^2-12t+27=0$
$2^{x_1}=8,\ 2^{x_2}=2$	$4^{x_1}=2,\ 4^{x_2}=1$	$t_1=9,\ t_2=3$
$2^{x_1}=2^3,\ 2^{x_2}=2^1$	$2^{2x_1}=2^1,\ 2^{2x_2}=2^0$	$9^{\frac{1}{x_1}}=9^1,\ 3^{\frac{2}{x_2}}=3^1$
$x_1=3,\ x_2=1$	$x_1=\frac{1}{2}, x_2=0$	$x_1=1,\quad x_2=2$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги равенките:

а) $9^x=\frac{1}{729}$; б) $5^x=\left(\frac{4}{5}\cdot1{,}25\right)^{10}$; в) $\left(\sqrt{10}\right)^x\cdot0{,}1=1000$;

г) $\left(\frac{4}{5}\right)^x-\frac{125}{64}=0$; д) $10^{\frac{4}{x}}=10^{x-3}$; ѓ) $4^x=\frac{81}{1296}$.

2. Реши ги равенките:

а) $16^{x-0{,}5}=32^{14-x}$; б) $2\cdot5^x=50$; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\frac{125}{64}=0$; г) $\frac{0{,}125}{4^{3-2x}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

3. Реши ги равенките:

а) $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0$; б) $49^x + 4\cdot 7^x - 5 = 0$; в) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

4*. Реши ги равенките:

а) $3^{4\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$; б) $15\cdot 2^{x+1} + 15\cdot 2^{-x+2} = 135$; в) $\dfrac{4^x+1}{4^{x+1}-2} = 2^{2x+1} - 1$.

5*. Реши ги равенките:

а) $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} = 12$; б) $3^{4x+8} - 4\cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$; в) $\dfrac{9}{2^{x-2}} = \dfrac{10+4^{\frac{x}{2}}}{4}$.

3. 3. Поим за логаритам

Дефиниција 1. Нека $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $b \in \mathbb{R}^+$. Реалниот број x таков што $a^x = b$ се нарекува **логаритам** од b со основа a. Пишуваме $x = \log_a b$.

Според тоа, за $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$,

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$$

Непосредно од дефиницијата следува дека

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Бројот x се нарекува **логаритам**, бројот a се нарекува **основа на логаритамот**, а бројот b се нарекува **логаритмант**.

1. Провери ги вредностите во табелата.

Поими	$\log_2 8 = 3$	$\log_5(m+3) = 2$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$
Логаритам	3	2	4
Основа на логаритамот	2	5	$\frac{1}{3}$
Логаритмант	8	$m+3$	$\frac{1}{81}$

2. а) $\log_3 9 = 2$, бидејќи $3^2 = 9$; б) $\log_4 2 = \dfrac{1}{2}$, бидејќи $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

в) $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$, бидејќи $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$. ♦

3. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_2 \frac{1}{4}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$; в) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}$.

а) Заради $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ добиваме дека $\log_2 \frac{1}{4} = -2;$

Проверка: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

б) Од $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ следува дека $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$.

Проверка: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.♦

в) Од $3^{-2} = 3^{\frac{1}{7}}$ следува дека $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3} = -2$.

Проверка: $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}} = \sqrt[7]{3}$.♦

4. Најди го логаритмантот, ако основата е $\frac{1}{2}$ и логаритамот е 4.

Од $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ следува дека $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$. Значи, логаритмантот е $\frac{1}{16}$.♦

5. Најди ја основата a ако $\log_a \frac{1}{8} = 3$.

Од дефиницијата за логаритам имаме $x^3 = \frac{1}{8}$, односно $x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Значи $x = \frac{1}{2}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Прецртај ја во тетратката табелата и пополни ја:

Поими	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a(b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
Логаритам					
Основа на логаритамот					
Логаритмант					

2. Најди ја вредноста на логаритмите:

а) $\log_3 \frac{1}{9}$; б) $\log_{0,1} 0{,}01$; в) $\log_3 \sqrt{3}$; г) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$.

3. Користејќи ја дефиницијата за логаритам, најди го x ако:

а) $\log_3 x = \frac{1}{2}$; б) $\log_x 36 = 2$; в) $\log_5 x = 0$; г) $\log_x 125 = 5$.

4. Најди ја вредноста на изразите:

а) $5^{\log_5 2}$; б) $5^{2\log_5 3}$.

5. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_2 8 - \log_3 9$; б) $4\log_{\sqrt{3}} 27 + 3\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

6*. За кои вредности на x изразот $\log_{0,2}(x^2 - x)$ има смисла?

3 . 4. Правила за логаритмирање

Нека $a > 0, a \neq 1, x > 0$ и $y > 0$.

I. Правило за логаритам од производ

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Доказ. Ако $\alpha = \log_a x$ и $\beta = \log_a y$, тогаш $a^\alpha = x$ и $a^\beta = y$. Од $x > 0$, $y > 0$ следува дека $xy > 0$, па според тоа постои $\log_a xy$. Тогаш имаме дека $a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y}$, од каде следува дека $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

1. $\log_2 6 = \log_2 2 \cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$. ♦

Правилото за логаритам од производ важи и во случај на конечно многу множители, односно за $x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0$, важи

$$\boxed{\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + ... + \log_a x_n}$$

II. Правило за логаритам од степен

$$\boxed{\log_a x^s = s\log_a x}$$

Доказ. Нека $\alpha = \log_a x$. Од $x > 0$ следува дека $x^s > 0$. Тогаш постои $\log_a x^s$. Заради $a^{\log_a x^s} = x^s = \left(a^{\log_a x}\right)^s = a^{s\log_a x}$ добиваме дека $\log_a x^s = s\log_a x$. ■

2. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4.$ ♦

III. Правило за логаритам од количник

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Доказ. Знаејќи дека $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, од правилото за логаритам од производ и логаритам од степен имаме $\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y.$ ■

3. $\log_7 0{,}7 = \log_7 \frac{7}{10} = \log_7 7 - \log_7 10 = 1 - \log_7 10.$ ♦

Како последица на правилата за логаритам со степен за $m,n \in \mathbb{N}$, имаме:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log_a x.}$$

4. $\log_2 \sqrt[7]{32} = \log_2 \sqrt[7]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}\log_2 2 = \frac{5}{7}.$ ♦

Севкупноста од логаритмите од сите позитивни броеви, пресметани по иста основа, се вика **логаритамски систем**. Логаритмите пресметани со основа 10 се викаат **декадни логаритми**. Декадните логаритми ги запишуваме со $\log x$, каде што основата 10 не се запишува. Често се користи и ознаката $\lg x$, односно $\log_{10} x = \log x = \lg x$. Логаритмите пресметани со основа e, каде $e \approx 2{,}71$ се викаат **природни логаритми**. Природните логаритми ги запишуваме со $\ln x$, односно $\log_e x = \ln x$. Правилата за логаритмирање важат и за декадните и за природните логаритми.

5. а) $\lg 10 = 1 \quad \lg 100 = \lg 10^2 = 2\lg 10 = 2 \quad \lg 10000 = \lg 10^4 = 4\lg 10 = 4$

б) $\ln e = 1 \quad \ln e^2 = 2\ln e = 2 \quad \ln e^4 = 4\ln e = 4$

в) $\lg 0{,}1 = \lg\frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1 \quad \lg 0{,}001 = \lg\frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3$

г) $\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1 \quad \ln\frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3.$ ♦

Од последната задача може да заклучиме дека логаритам од декадни единици поголеми од 1 е цел позитивен број и има онолку единици колку што има нули декадната единица, а логаритам од декадни единици помали од 1 е цел негативен број кој има онолку единици колку што има нули декадната единица.

Нека x е позитивен реален број за кој $\lg x$ е рационален број, односно $\lg x = k$, $k \in \mathbb{Q}$. Тогаш $x = 10^k$. Според тоа, декаден логаритам од позитивен број кој не е од обликот 10^k, $k \in \mathbb{Q}$ е ирационален број. Неговиот декаден запис има бесконечно многу децимали, па се покажува практичен договорот за заокружување на бројот на 5 децимали.

Ако A е кој било позитивен реален број, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$, така што $10^{n-1} \le A \le 10^n$, од каде следува дека $\lg 10^{n-1} \le \lg A \le \lg 10^n$. Според дефиницијата за декаден логаритам имаме $n-1 \le \lg A < n$. Од последното неравенство следува неравенството: $0 \le \lg A - (n-1) < n$. Според тоа

$$\boxed{\lg A = (n-1) + \alpha}, \text{ каде што } n \in \mathbb{N} \text{ и } 0 \le \alpha < 1.$$

Бројот n се вика **карактеристика**, а α се вика **мантиса** на логаритамот од бројот A. Со други зборови, целиот дел на логаритамот се нарекува карактеристика, а децималниот дел се нарекува мантиса на логаритамот. Според тоа, карактеристиката може да биде позитивен, негативен цел број или нула, додека мантисата е број меѓу 0 и 1.

6. Најди ја карактеристиката на $\lg 495{,}27$.

Заради $100 \le 495{,}27 < 1000$ добиваме дека $\lg 100 \le \lg 495{,}27 < \lg 1000$, односно $2 \le \lg 495{,}27 < 3$. Според тоа, $\lg 495{,}27 = 2 + \alpha$, каде што $0 \le \alpha < 1$. Карактеристиката на $\lg 495{,}27$ е 2. ♦

7. Најди ја карактеристиката на $\lg 0{,}037$.

Од $0{,}01 < 0{,}037 < 0{,}1$, имаме $\lg 0{,}01 < \lg 0{,}037 < \lg 0{,}1$ или $-2 < \log A < -1$. Според тоа, $\lg 0{,}037 = -2 + \alpha$, каде што $0 \le \alpha < 1$. Карактеристиката на $\lg 0{,}037$ е -2. ♦

Од задачите 6 и 7 може да заклучиме дека карактеристиката на броевите поголеми од 1 е за еден помала од бројот на цифрите на целиот дел од неговиот запис, а карактеристиката на броевите помали од 1 е негативен број кој има онолку единици колку што има нули лево од првата цифра различна од нула.

8. Со помош на калкулатор можеме да пресметаме, на пример, дека

$\lg 24{,}257 = 1{,}38484$

$\lg 1278{,}13 = 3{,}10658$

$\lg 0{,}00257 = -2{,}59007$. ♦

9. Најди го декадниот логаритам од изразот $\dfrac{a^2b}{c^4}$, ако $\lg a = m$, $\lg b = n$, $\lg c = p$.

$$\lg \frac{a^2b}{c^4} = \lg a^2b - \lg c^4 = \lg a^2 + \lg b - \lg c^4 = 2\lg a + \lg b - 4\lg c = 2m + n - 4p. \ ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Логаритмирај ги изразите:

а) $x=3ab$; б) $x=a^2bc^5$, в) $x=\dfrac{ab}{2c}$;

г) $x=2(a-b)$; д) $x=\dfrac{\sqrt{a}}{b^2-c^2}$; ѓ) $x=\sqrt{a\sqrt[3]{b^2}}$.

2. Упрости ги изразите:

а) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3\log_3 4)$; б) $\log_3 64\log_2 \dfrac{1}{27}$; в) $\log_2 \log 100$.

3. Најди го бројот x, ако е познат неговиот логаритам:

а) $\lg x=\lg 5-\lg 2+\log 4$; б) $\lg x=3\lg 2-2\lg 3$;

в) $\lg x=\dfrac{1}{2}\lg 3+\dfrac{2}{3}\lg 5-\dfrac{1}{3}\lg 2$; г) $\lg x=\dfrac{1}{4}(2\lg 2-4\lg 3+5\lg 4)$;

д) $\ln x=\ln 5-\ln 3+\ln 1$; ѓ) $\ln x=3\ln 2-3\ln 3$;

е) $\ln x=\dfrac{1}{3}\ln 3+\dfrac{1}{3}\ln 4-\dfrac{1}{3}\ln 2$; ж) $\ln x=\dfrac{1}{4}(2\ln 2+4\ln 3+5\ln 4)$.

4. Ако земеме дека $\lg 2\approx 0{,}30$ и $\log 3\approx 0{,}48$, најди приближната вредност на:

а) $\lg 4$, $\lg 6$, $\lg 8$, $\lg 9$; б) $\lg 12$, $\lg 16$, $\lg 18$.

5. Запиши ја карактеристиката на логаритмите:

а) $\lg(0{,}7545\cdot 0{,}0256\cdot 0{,}65^2)$; б) $\lg\dfrac{28{,}5\cdot 3{,}507}{0{,}457\cdot 0{,}0293}$;

в)* $\lg\sqrt[5]{\dfrac{129}{9775}}$; г)* $\lg(0{,}85\cdot\sqrt[3]{0{,}55})$.

3. 5. Врски меѓу логаритми со различни основи

Нека $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ x>0$.

Правило за смена на основата на логаритам

$$\boxed{\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}}.$$

Доказ. Ако ги логаритмираме двете страни на равенството $x=a^{\log_a x}$ со логаритам со основа b добиваме дека $\log_b x=\log_b(a^{\log_a x})=\log_a x\cdot\log_b a$, односно $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. ■

1. $\log_3 7\cdot\log_7 6\cdot\log_6 9=\log_3 7\cdot\dfrac{\log_3 6}{\log_3 7}\cdot\log_6 9=\log_3 6\cdot\log_6 9=\log_3 6\cdot\dfrac{\log_3 9}{\log_3 6}=$

$=\log_3 9=2.$ ♦

Последица 1. Ако $x=b\neq 1$, тогаш $\boxed{\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}}$.

Доказ. Имаме $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$.■

2. $\log_{32} 2=\dfrac{1}{\log_2 32}=\dfrac{1}{5}$. ♦

Последица 2. Ако $s\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0$, тогаш $\boxed{\log_{a^s} b=\dfrac{1}{s}\log_a b}$.

Доказ. $\log_{a^s} \mathrm{b}=\dfrac{1}{\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a}^{\mathrm{s}}}=\dfrac{1}{\mathrm{s}\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a}}=\dfrac{1}{\mathrm{s}}\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$. ■

3. $\log_{2^3} 4=\dfrac{1}{3}\log_2 4=\dfrac{1}{3}\cdot 2=\dfrac{2}{3}$. ♦

Последица 3. Ако $\mathrm{s}\neq 0,\ \mathrm{a}>0,\ \mathrm{a}\neq 1,\ \mathrm{b}>0$, тогаш $\boxed{\log_{a^s} b^s=\log_a b}$.

Доказ. Имаме $\log_{a^s} b^s=s\log_{a^s} b=s\cdot\dfrac{1}{s}\log_a b=\log_a b.$■

4. а) $\log_4 2^2=\log_{2^2} 2^2=\log_2 2=1$; б) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{9}=\log_{3^{\frac{1}{3}}} 9^{\frac{1}{3}}=\log_3 9=2.$ ♦

6. Ако земеме дека $\lg 2\approx 0{,}30$ и $\lg 3\approx 0{,}48$, може да пресметаме:

$$\log_5 6=\frac{\lg 6}{\lg 5}=\frac{\lg(2\cdot 3)}{\lg\dfrac{10}{2}}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 10-\lg 2}\approx\frac{0{,}30+0{,}48}{1-0{,}30}=\frac{0{,}78}{0{,}70}=\frac{39}{35}.\ ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Искажи ја врската меѓу логаритмите со различни основи.

2. Докажи ги равенствата:
а) $\log_3 12=\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$;
б) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=\dfrac{1}{3}$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125$.

4. Упрости ги изразите:

а) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$; б) $\log_3 64 \cdot \log_2 \dfrac{1}{27}$; в) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}$.

5*. Докажи дека ако $a > 0,\ b \neq 1,\ b > 0,$ тогаш $\log_b a = -\log_{\frac{1}{b}} a$.

3. 6. Логаритамски равенки

Дефиниција 1. Равенки кај кои непознатата се наоѓа во логаритмантот се нарекуваат **логаритамски равенки**.

1. Логаритамски равенки се, на пример, равенките:
$\log_2(x+4) = 7,\quad \log_{2x}(5+x^2) = 9,\quad \log_5(3x-2) = \log_5 x.$ ♦

Нека $a > 0,\ \ a \neq 1$.

I. Решавање на логаритамски равенки од видот $\log_a f(x) = b$

Од дефиницијата за логаритам следува еквивалентност на равенките:
$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x)$.

2. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x+5) = 3$	б) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-7x+13) = 0$	в) $\log_5(x^2-9)^2 = 2$
$x+5 = 3^3$	$x^2-7x+13 = (\sqrt{3})^0$	$(x^2-9)^2 = 5^2$
$x+5 = 27$	$x^2-x+12 = 0$	$x^4-18x^2+56 = 0$
$x = 22$	$x_1 = -3$ и $x_2 = 4$	$x_{1,2} = \pm 2,\ \ x_{3,4} = \pm\sqrt{14}$

Ако за решавање на логаритамската равенка под в) го искористиме правилото за логаритам од степен добиваме:

$$\log_5(x^2-9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_5(x^2-9) = 2 \Leftrightarrow \log_5(x^2-9) = 1 \Leftrightarrow x^2-9 = 5 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{14}.$$ ♦

Добивме само две решенија на равенката, бидејќи неправилно го користевме правилото за логаритам од степен, односно равенството $\log_a b^2 = 2\log_a b$, кое е точно само за $b > 0$. Употребата на правилото за логаритам од степен ќе биде правилна ако запишеме:

$$\log_5(x^2-9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2\log_5\left|x^2-9\right| = 2 \Leftrightarrow \log_5\left|x^2-9\right| = 1 \Leftrightarrow \left|x^2-9\right| = 5.$$

II. Решавање на логаритамски равенки од видот $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Решенијата на равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ се добиваат со решавање на равенката $f(x) = g(x)$. Секое решение на равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ е решение на равенката $f(x) = g(x)$. Обратното во општ случај не важи, па затоа за добиените решенија на равенката $f(x) = g(x)$ ќе вршиме проверка во равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

3. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$

$x^2 - 7x + 11 = x - 4$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x_1 = 3,\ x_2 = 5$

Проверка: $x = 3$

$\log_3(3^2 - 7 \cdot 3 + 11) = \log_3(3 - 4)$

$\log_3(-1) = \log_3(-1)$, не постои

$x = 3$ не е решение

Проверка: $x = 5$

$\log_3(5^2 - 7 \cdot 5 + 11) = \log_3(5 - 4)$

$\log_3 1 = \log_3 1$

Решение на дадената логаритамската равенка е $x = 5$.

б) $\lg(3x - 2 - 2x^2) = \lg(x^2 - 10x - 12)$

$3x - 2 - 2x^2 = x^2 - 10x - 12$

$3x^2 - 13x - 10 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = -\dfrac{2}{3}$

Проверка: $x = 5$

$\lg(3 \cdot 5 - 2 - 2 \cdot 5^2) = \lg(5^2 - 10 \cdot 5 - 12)$

$\lg(-37) = \lg(-37)$, не постои.

$x = 5$ не е решение

Проверка: $x = -\dfrac{2}{3}$

$$\lg\left\{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\} = \lg\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 12\right\}$$

$\lg\left(-\dfrac{44}{9}\right) = \lg\left(-\dfrac{44}{9}\right)$, не постои.

Дадената логаритамската равенка нема реални решенија. ♦

III. Решавање на равенки кои се сведуваат на равенки од видот $\log_a f(x) = b$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

4. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x - 3) + \log_3(2x + 1) = 2$

б) $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x - 3)$

в) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$.

а) $\log_3(x - 3) + \log_3(2x + 1) = 2$

$\log_3(x - 3) \cdot (2x + 1) = 2$

$2x^2 - 5x - 12 = 0$

Проверка: со замена за $x = 4$, а потоа за $x = -\dfrac{3}{2}$, добиваме дека равенката има само едно решение $x = 4$.

$x_1 = 4, x_2 = -\dfrac{3}{2}$

б) $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x-3)$

$\log_5(x^2 - 6x + 7) - \log_5(x-3) = 0$

$\log_5 \dfrac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 0$

$\dfrac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 1, x \neq 3$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = 2$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

кога $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$

Проверка: со замена за $x = 5$, а потоа за $x = 2$, заклучуваме дека равенката има само едно решение $x = 5$.

в) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$

Со замена $\sqrt{\lg 2x} = t$, имаме:

$4 - t^2 = 3t$

$t^2 + 3t - 4 = 0$

$t_1 = 1, t_2 = -4$

$\sqrt{\lg 2x} = 1$

$x = 5.$

Проверка: бидејќи равенката $\sqrt{\lg 2x} = -4$ нема решение, со замена за $x = 5$, заклучуваме дека равенката има само едно решение $x = 5$. ♦

5. Реши ги равенките:

а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7,$

$\dfrac{1}{4}\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7,$

$\dfrac{7}{4}\log_2 x = 7,$

$\log_2 x = 4,$

$x = 2$

Проверка: $\log_{16} 2 + \log_4 2 + \log_2 2 = 7$

Решението на равенката е $x = 2.$

б) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1.$

$\log_{3^2} x + \dfrac{1}{\log_3 x^2} = 1$

$\dfrac{1}{2}\log_3 x + \dfrac{1}{2\log_3 x} = 1$

$\log_3{}^2 x - 2\log_3 x + 1 = 0$

$\log_3 x = t$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t = 1$

$\log_3 x = 1$

$x = 3.$

Проверка: $\log_9 3 + \log_9 3 = 1$

$2\log_9 3 = 1,\ \log_9 9 = 1$

Решението на равенката е $x = 3.$

в) $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x - 20) - \lg(2x-1).$

$\lg 5 + \lg(x+10) - \lg 10 = \lg(21x - 20) - \lg(2x-1)$

$$\lg\frac{5(x+10)}{10}=\lg\frac{21x-20}{2x-1}$$

$$\frac{5(x+10)}{10}=\frac{21x-20}{2x-1}$$

$$5(x+10)(2x-1)=10(21x-20)$$

$$10x^2+95x-50=210x-200$$

$$x_1=10,\quad x_2=\frac{3}{2}.\ \blacklozenge$$

Проверка:

$$\lg 5+\lg 20-1=\lg 190-\lg 19$$

$$\lg 100-\lg 10=\lg 10$$

$$\lg 10^2=2\lg 10$$

$$2\lg 10=2\log 10$$

Решение на равенката е $x=10$.

Провери дали $x_2=\frac{3}{2}$ е решение на равенката?

Задачи за самостојна работа

Реши ги равенките:

1. $\log_{\sqrt{3}}(2x^2-6)=2.$ **2.** $\log_3(x^2-5x+7)=1.$

3. $\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$ **4.** $\lg(3x-1)+\lg(12-x)=2.$

5. $\log_x 2-\log_x 3=4.$ **6.** $\log_2 x-\log_{16} x=3.$

7*. $\log_3(1+\log_3(2x-7))=1.$

3. 7. Задачи за вежбање

1. За кои реални броеви x и y, важи:

а) $8^x=8^y$; б) $\sqrt{3}^x>\sqrt{3}^y$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$?

2. Што е поголемо $a^{\frac{2}{3}}$ или $a^{\frac{3}{4}}$ ако:

а) $a>1$; б) $0<a<1$?

Реши ги равенките:

5. $16^{x-0,5}=32^{14-x}.$ **6.** $2\cdot 5^x=50.$ **7.** $4^x-6\cdot 2^x=-8.$

8. $\left(9^{x-1}\right)^{x-1}=9^{x-4}\cdot 3^{2x+4}.$ **9.** $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\frac{125}{64}=0.$ **10*.** $4^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{x}}=12.$

11. Со користење на дефиницијата за логаритам, најди го бројот x, ако:

а) $\log_x 16 = 2$; б) $\log_x 27 = -\frac{3}{4}$; в) $\log_x 1000 = -3$;

г) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; д) $\log_{100} x = 0{,}2$; ѓ) $\log_{\frac{1}{3}} x = 8$.

12. Логаритмирај ги следниве изрази:

а) $2xy$; б) $3x^2y^2$; в) $x^2y^5\sqrt{z}$; г) $a^{\sqrt{b}}c^3$;

д) $6x\sqrt[3]{y^2}$; ѓ) $\sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y}}}$; е)* $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{y}}}$.

13. Најди го бројот x ако е познат неговиот логаритам.

а) $\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 2$; б) $\lg x = \lg 5 + \frac{1}{2}(\lg 8 - \lg 2)$;

в) $\log x = \log 7 + \log 9 - \log 3$; г) $\log x = 2\log 3 + 3\log 5$.

14. Со примена на логаритам, пресметај ја вредноста на изразите:

а) $x = \frac{333{,}648 \cdot 2{,}49}{125{,}36}$; б) $x = \frac{43{,}5 \cdot 0{,}26^2}{6{,}38^3 \cdot 1{,}28}$; в) $x = 3{,}25^3 \cdot \sqrt[5]{54{,}21}$.

15. Смени ја основата на:

а) $\log_2 5$ со 4; б) $\log_3 7$ со $\sqrt{7}$; в) $\lg 5$ со 10^{-1}.

16*. Упрости ги изразите, користејќи ги врските меѓу логаритмите со различни основи.

а) $\dfrac{\log_{3^2} 25 + \log_3 7}{\log_3 \dfrac{5^2 \cdot 7^2}{3^2} + 2}$; б) $\log_2 \sqrt{x}(x+1) - \log_2 (x+1)^2 + \log_4 (x+1)$.

17. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125$;

б) $\log_3 2 + \log_7 245 + \log_{12} 7 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{7}} 5 + \log_{\frac{1}{12}} 84$.

Реши ги равенките:

18. $\lg x + \lg(x-3) = 1$. **19.** $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$.

20. $7\log_{25} x - \log_5 x = 5$. **21.** $\log_{x-1} 3 = 2$.

22. $\log_5 (x-3) = \log_5 (x^2 - 5x - 10)$. **23*.** $\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$.

Тематски преглед

За секој реален број x и секој позитивен реален број a е определен степен со реален показател a^x на следниот начин.

I. Ако $x > 0$ и

1. $x = n,$ тогаш $a^x = \begin{cases} a & \text{за } n = 1 \\ \underbrace{aa...a}_{n} & \text{за } n > 1 \end{cases}$

2. $x = \frac{1}{n},$ тогаш $a^x = \sqrt[n]{a}$

3. $x = \frac{k}{n},\ k \in \mathbb{N},$ тогаш $a^x = \sqrt[n]{a^k}$

4. $x = c_0, c_1c_2...c_n...,$ тогаш

а) за $a > 1,$ имаме $a^{c_0,c_1c_2...c_n} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}$

б) за $0 < a < 1,$ имаме $a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...c_n}$

в) за $a = 1,$ имаме $a^x = 1$

II. Ако $x = 0$ тогаш $a^x = 1$

III. Ако $x < 0$ тогаш $a^x = \frac{1}{a^{|x|}}$

За степен на позитивен реален број a со реален показател важат следниве својства:

1. $a^x = b^x$, за секое $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако $a = b$

2. За секој $x \in \mathbb{R}$ постои единствен степен a^x

3. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ за секои $x, y \in \mathbb{R}$

4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ за секои $x, y \in \mathbb{R}$

5. $(ab)^x = a^x b^x$ за секое $x \in \mathbb{R}$

Равенки кај кои непознатата се наоѓа во степеновиот показател се нарекуваат **експоненцијални равенки**.

Разработени се следниве видови експоненцијални равенки:

I. Равенки од видот $A^x + m = 0,\ A > 0,\ A \neq 1,\ m < 0$

II. Равенки од видот $A^{f(x)} + m = 0,\ A > 0,\ A \neq 1,\ m < 0$

III. Равенки од видот $a(A^{f(x)})^2 + bA^{f(x)} + c = 0$

Нека $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $b \in \mathbb{R}^+$. Реалниот број x таков што $a^x = b$ се нарекува **логаритам** од b со основа a. Пишуваме $x = \log_a b$.

Според тоа, за $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$,

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$$

Непосредно од дефиницијата следува дека

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Бројот x се нарекува **логаритам**, бројот a се нарекува **основа на логаритамот**, а бројот b се нарекува **логаритмант**.

Нека $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ и $y > 0$.

I. Правило за логаритам од производ

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Правилото за логаритам од производ важи и во случај на конечно многу множители, односно за $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$, важи

$$\boxed{\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}$$

II. Правило за логаритам од степен

$$\boxed{\log_a x^s = s \log_a x}$$

III. Правило за логаритам од количник

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Како последица на правилата за логаритам со степен за $m, n \in \mathbb{N}$, имаме:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a x.}$$

Севкупноста од логаритмите од сите позитивни броеви, пресметани по иста основа, се вика **логаритамски систем**. Логаритмите пресметани со основа 10 се викаат **декадни логаритми**. Декадните логаритми ги запишуваме со $\log x$, каде што основата 10 не се запишува. Логаритмите пресметани со основа e, каде $e \approx 2{,}71$ се викаат **природни логаритми**. Природните логаритми ги запишуваме со $\ln x$, односно

$\log_e x = \ln x$. Правилата за логаритмирање важат и за декадните и за природните логаритми.

Ако A е кој било позитивен реален број, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$, така што $\boxed{\lg A = (n-1) + \alpha}$, каде што $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq \alpha < 1$.

Бројот n се вика **карактеристика**, а α се вика **мантиса** на логаритамот од бројот A.

Нека $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ x > 0$.

Правило за смена на основата на логаритам

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}.$$

Ако $x = b \neq 1$, тогаш $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$.

Ако $s \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$, тогаш $\boxed{\log_{a^s} b = \dfrac{1}{s}\log_a b}$.

Ако $\mathrm{s} \neq 0,\ \mathrm{a} > 0,\ \mathrm{a} \neq 1,\ \mathrm{b} > 0$, тогаш $\boxed{\log_{a^s} b^s = \log_a b}$.

Равенки кај кои непознатата се наоѓа и во логаритмантот се нарекуваат **логаритамски равенки**.

Нека $a > 0,\ \ a \neq 1$. Разработени се следниве видови логаритамски равенки:

I. Равенки од видот $\log_a f(x) = b$

II. Равенки од видот $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

III. Равенки кои се сведуваат на равенки од видот $\log_a f(x) = b$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

4. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

4. 1. Тригонометриски функции од остар агол

Мерење на агли

Да се потсетиме, унијата од две полуправи со заеднички почеток и еден од деловите на кои тие полуправи ја делат рамнината се вика **агол.** Во таа смисла, две полуправи OA и OB со заеднички почеток одредуваат два агла, кои ги означуваме со $\angle AOB$ (или $\angle BOA$) или со грчките букви $\alpha, \beta, \gamma,....$ Полуправите OA и OB се викаат **краци** на аголот AOB, а точката О негово **теме**.

Постојат различни начини за изразување на големината на аглите. До сега, како единица мерка за мерење агли го користевме **степенот**. **Еден степен (1º)** е единица мерка за мерење агли дефинирана како $\frac{1}{360}$ дел од полниот агол. Помали единици мерки се **една минута (1')** која е дефинирана како $\frac{1}{60}$ дел од еден степен и **една секунда (1'')** дефинирана како $\frac{1}{60}$ дел од една минута, односно $\frac{1}{3600}$ дел од еден степен. Користејќи ги овие односи можеме да претвораме степени, минути, секунди во децимален облик на степени.

1. Претвори го аголот од $14^0 36^{'} 54^{''}$ во децимален облик.

$$14^0 36^{'} 54^{''} = 14^0 + \left(\frac{36}{60}\right)^0 + \left(\frac{54}{3600}\right)^0 = 14^0 + 0{,}6^0 + 0{,}015^0 = 14{,}615^0. \ \blacklozenge$$

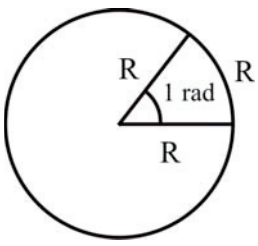
2. Претвори го аголот $72{,}568^0$ во степени, минути и секунди.

$$72{,}568^0 = 72^0 + (0{,}56 \cdot 60)^{'} = 72^0 + 33{,}9^{'} = 72^0 + 33^{'} + (0{,}9 \cdot 60)^{''} = 72^0 + 33^{'} + 54^{''} = 72^0 33^{'} 54^{''}.$$

Во продолжение ќе воведеме нова единица мерка за мерење агли. Имено, големината на централен агол во кружница чиј соодветен лак има должина еднаква на должината на радиусот на таа кружница, се нарекува **еден радијан** и се означува со **1 rad**. (црт. 1).

Да ја утврдиме врската меѓу двете единици мерки за мерење на агли, степен и радијан.

Бидејќи должината на кружница со радиус R е $2R\pi$, полниот агол, кој е централен агол на целата кружница, има големина $2\pi rad$. Од друга страна, полниот агол има големина 360^0, па според тоа $360^0 = 2\pi rad$. Од последното следува дека



Црт. 1

$$1 rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}29578^0 \approx 57^0 17^{'} 45^{''} \text{ и } 1^0 = \frac{\pi}{180} rad \approx 0{,}01745 rad.$$

3. а) Изрази ги во радијани аголот $100^0 11^{'} 15^{''}$.

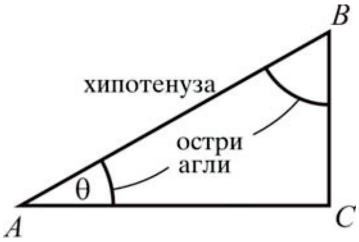
$$100^0 11^{'} 15^{''} = 100\cdot\frac{\pi}{180}+11\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{\pi}{180}+15\cdot\frac{1}{3600}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 1{,}7\,rad$$

б) Изрази ги во степени аголот $\frac{5\pi}{12}$.

$$\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}\cdot\frac{180^0}{\pi}=75^0.$$ ♦

- Множи ги степените со $\frac{\pi}{180}$, за да претвориш во радијани.
- Множи ги радијаните со $\frac{180}{\pi}$, за да претвориш во степени.

Синус, косинус, тангенс и котангенс од остар агол



Црт. 2

Ќе преминеме на дефинирањето на четирите тригонометриските функции од остар агол, со помош на правоаголен триаголник.

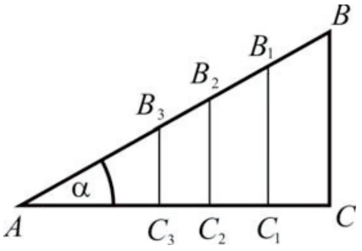
Во триаголникот ABC (црт. 2) аголот при темето C е прав агол, а двата агли при темињата A и B се остри агли.

Ако го означиме со θ остриот агол при темето A тогаш страната BC се вика **спротивна** катета, а страната AC **прилегната** катета за аголот θ.

Да го разгледаме правоаголниот триаголник ABC и отсечки B_1C_1, B_2C_2 и B_3C_3 кои се нормални на страната AC (црт. 3). Тие отсечки се катети на правоаголните триаголници AB_1C_1, AB_2C_2 и AB_3C_3 кои имаат заеднички агол α со правоаголниот триаголник ABC. Правоаголните триаголници се слични, па соодветните страни им се пропорционални, односно:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}}=\frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}};\quad \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}}=\frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}};$$

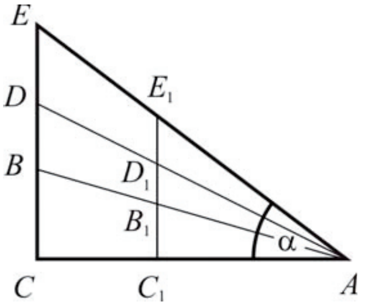
$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}}=\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}}=\frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \text{ и } \frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}}=\frac{\overline{AC_3}}{\overline{B_3C_3}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$



Црт. 3

Значи, за даден агол α, односите помеѓу должините на соодветните страни на правоаголните триаголници од црт. 3 се константни.

Но, ако се промени големината на аголот α тогаш ќе се промени и вредноста на односите. За да дојдеме до овој заклучок, доволно е да ги разгледаме правоаголните триаголници AB_1C_1, AD_1C_1 и AE_1C_1 (црт. 4). Овие триаголници не се слични, па затоа односите на соодветните страни не се еднакви, односно $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}}\neq\frac{\overline{D_1C_1}}{\overline{A_1C_1}}$ и така натаму. Значи промената на аголот α влијае на промената на вредноста на односот на должината на соодветните страни. Така може да заклучиме дека односот од должината на две страни во правоаголен триаголник, зависи од големината на остриот агол на тој триаголник. Ако е дадена вредноста на аголот, може да се одреди вредноста на односот на страните и обратно, ако е дадена вредноста на било кој од претходните односи, може да се одреди големината на остриот агол. Значи помеѓу острите агли во правоаголен триаголник и односите на должините на неговите страни постојат функции. Затоа тие односи добиле и посебни имиња:



Црт. 4

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ се нарекува **синус** на аголот и се означува $\sin\alpha$, односно $\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ се нарекува **косинус** на аголот и се означува $\cos\alpha$, односно $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$;

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ се нарекува **тангенс** на аголот, и се означува $tg\alpha$, односно $tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ и

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ се нарекува **котангенс** на аголот и се означува $ctg\alpha$, односно $ctg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Претходно дефинираните функции кои ја опишуваат зависноста помеѓу должините на страните во правоаголен триаголник и неговите остри агли се викаат **тригонометриски функции.** Тие функции се искажуваат и на следниот начин:

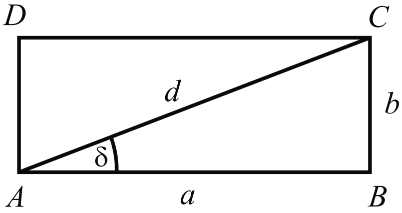
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{спротивна катета за } \alpha}{\text{хипотенуза}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилегната катета за } \alpha}{\text{хипотенуза}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{спротивна катета за } \alpha}{\text{прилегната катета за } \alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилегната катета за } \alpha}{\text{спротивна катета за } \alpha}$$

4. Најди ги тригонометриските функции на остриот агол δ во правоаголникот $ABCD$ на црт. 5.

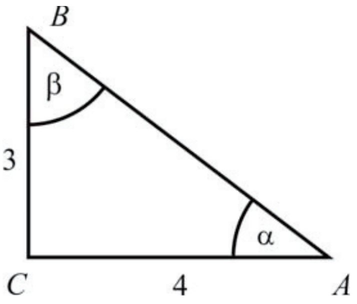
Од правоаголниот триаголник ABC имаме дека:

$$\sin\delta = \frac{b}{d}, \qquad \cos\delta = \frac{a}{d}, \qquad tg\delta = \frac{b}{a}, \qquad ctg\delta = \frac{a}{b}. \blacklozenge$$



Црт. 5

5. Даден е правоаголен триаголник чии катети се 3 *cm* и 4 *cm*. Најди ги тригонометриските функции од острите агли (црт. 6).



Црт. 6

Според Питагоровата теорема ја наоѓаме хипотенузата

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \text{ односно } c = 5.$$

Тогаш

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad tg\alpha = \frac{3}{4} \qquad ctg\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} \qquad tg\beta = \frac{4}{3} \qquad ctg\beta = \frac{3}{4}. \blacklozenge$$

Тригонометриските функции синус и косинус се дефинираат и за нултиот и правиот агол со:

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Исто така се дефинира $tg0 = 0$, $ctg\frac{\pi}{2} = 0$, додека $tg\frac{\pi}{2}$ и $ctg0$ не се дефинирани.

Задачи за самостојна работа

1. Прецртај ја и пополни ја табелата.

Степени	0^0	30^0		60^0		180^0		360^0
Радијани			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

Најди ги тригонометриските функции на аголот β во правоаголен триаголник ако се дадени двете катети a и b.

2. $a = 5$, $b = 12$; **3.** $a = 3$, $b = 5{,}2$.

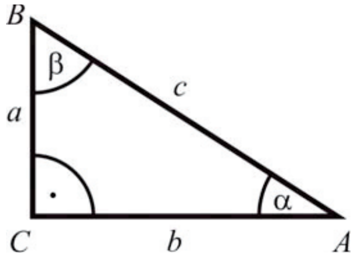
Најди ги тригонометриските функции на аголот α во правоаголен триаголник ако се дадени катетата a и хипотенузата c:

4. $a = 8$, $c = 10$; **5.** $a = 9{,}8$, $c = 12{,}6$.

4. 2. Пресметување на вредностите на тригонометриските функции од некои агли

При решавањето на разни проблеми во геометријата се користат тригонометриските функции на аглите 30°, 45° и 60°. За пресметување на тригонометриските функции на овие агли ќе ги користиме и својствата на тригонометриските функции од комплементни агли.

Да се потсетиме дека два агли се нарекуваат комплементни ако нивниот збир е прав агол. Двата остри агли во правоаголен триаголник се комплементни агли. Зошто? Ако α е еден од острите агли правоаголниот триаголник *ABC* (црт. 7), тогаш аголот $\beta = 90^0 - \alpha$ е неговиот комплементен агол. Ако аголот α е даден во радијани, тогаш $\frac{\pi}{2} - \alpha$ е неговиот комплементен агол. Понатаму, страната a е спротивна катета за аголот α, а прилегната за аголот β, додека страната b е прилегната катета за аголот α, а спротивна за аголот β. Според тоа, за тригонометриските функции од аглите α и β (при што $\alpha \neq 0^0$ и $\beta \neq 0^0$), имаме:



Црт. 7

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad tg\alpha = \frac{a}{b} = ctg\beta, \quad ctg\alpha = \frac{b}{a} = tg\beta, \text{ односно}$$

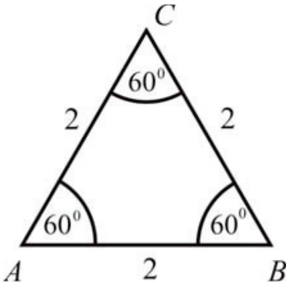
$$\boxed{\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha),\ \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha),\ tg\alpha = ctg(90 - \alpha),\ ctg\alpha = tg(90^0 - \alpha)}.$$

1. На пример, $\cos 70^0 = \sin(90^0 - 70^0) = \sin 20^0$; $\sin 10^0 = \cos(90^0 - 10^0) = \cos 80^0$;

$$tg\frac{\pi}{6} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = ctg\frac{\pi}{3}; \quad ctg\frac{\pi}{6} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{3}. \ ♦$$

Да го разгледаме рамностраниот триаголник *ABC* со страна долга 2 единици (црт. 8). Висината *AD* спуштена од темето *A*, претставува во исто време бисектриса на аголот при темето *A*, како и симетрала на спротивната страна *BC*. Значи,

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \text{и} \quad \angle DAB = \frac{1}{2}(\angle CAB) = \frac{1}{2}(60^0) = 30^0.$$



Црт. 8

Со примена на Питагорова теорема за правоаголниот триаголник *ABD* (црт. 9) добиваме

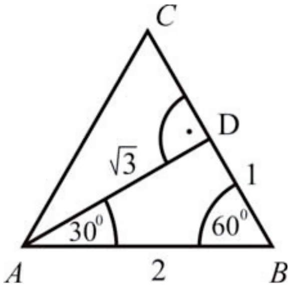
$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 \text{ или } \overline{AD}^2 + 1^1 = 2^2.$$

Според тоа $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, односно $\overline{AD} = \sqrt{3}$.

Сега можеме да ги пресметаме тригонометриските функции на аглите во правоаголниот триаголник *ABD*:

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}; \qquad \sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2};$$

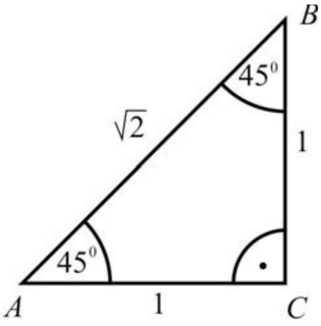
$$\cos 30^0 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



Црт. 9

$tg30^0 = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$; $\qquad tg30^0 = ctg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$ctg30^0 = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; $\qquad ctg30^0 = tg60^0 = \sqrt{3}$.



Црт. 10

За да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции од 45^0 конструираме рамнокрак правоаголен триаголник со страна долга 1 единица. (црт. 10). Неговите остри агли се по 45^0.

Според Питагоровата теорема за хипотенузата имаме дека $|AB| = \sqrt{2}$. Од дефиницијата на тригонометриските функции следува дека:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 \quad \text{и} \quad tg45^0 = \frac{1}{1} = 1 = ctg45^0.$$

Добиените вредности за тригонометриските функции ги претставуваме во табела:

Степени	Радијани	*sin*	*cos*	*tg*	*ctg*
0^0	0	0	1	0	/
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

2. Пресметај ја вредноста на изразот $\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 30^0$.

$$\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \blacklozenge$$

4. Најди ја бројната вредност на изразот $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha}$ за $\alpha = 30^0$.

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos 2 \cdot 30^0}{1 + \sin 30^0} = \frac{\cos 60^0}{1 + \sin 30^0} = \frac{\cos 60^0}{1 + \cos 60^0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај:

а) $\cos 57^0$ преку $\sin 33^0$; б) $\sin 77{,}77^0$ преку $\cos 12{,}23^0$;

в) $ctg\dfrac{5\pi}{18}$ преку $tg\dfrac{2\pi}{9}$; г) $tg\left(\dfrac{\pi}{2}-1{,}087\right)$ преку $ctg1{,}0785$.

2. Пресметај го аголот α ако се знае дека:

а) $\cos(\alpha+10^0)=\sin 20^0$; б) $tg35^0=ctg(\alpha-15^0)$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sin^2 30^0+\cos^2 30^0$; б) $\dfrac{\sin 30^0+1}{1+\cos 60^0}$; в) $\dfrac{tg30^0+ctg45^0}{ctg60^0+tg45^0}$.

4. Пресметај:

а) $2\cdot\cos 30^0\cdot\cos 45^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$; б) $\sin^2 30^0+tg^2 60^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$.

5*. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\dfrac{1+\sin 30^0}{1-\sin 30^0}$; б) $\dfrac{ctg60^0+tg45^0}{1-tg60^0\cdot tg45^0}$; в) $\dfrac{4\sin^2 45^0+1}{ctg^2 30^0}$.

6. Пресметај ја вредноста на аголот α ако:

а) $tg\alpha=1$; б) $ctg\alpha=\sqrt{3}$;

в) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$; д) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 3. Пресметување на вредностите на тригонометриските функции со калкулатор

Видовме дека за аглите 0^0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2}$ лесно е да се најдат точни вредности за тригонометриските функции. Во случај кога тоа не е можно нивните приближни вредности ги наоѓаме со таблици или со калкулатор.

Калкулаторите најчесто имаат посебно копче за конверзија на степени, минути и секунди во децимални степени. Тоа копче најчесто е означено со ($\boxed{{}^{\circ}\ '\ ''}$) или ($\boxed{\text{DMS}}$) (според degrees - minutes - seconds).

Доколку сакаме да го претвориме аголот $32^0\,45'\,10''$ во степен постапуваме на следниот начин: запишуваме 32, па го притискаме копчето; внесуваме 45, го притискаме копчето; внесуваме 10 и по третпат го притискаме копчето. Добиениот резултат е $32{,}7527778^0$.

Ако сакаме да претвориме агол даден во децимален степен во степени, минути и секунди, тогаш го користиме и копчето означено најчесто со жолта боја на кое пишува $\boxed{2^{ndf}}$ или $\boxed{\text{inv}}$, со кое се прави инверзија на соодветна операција. После внесувањето на децималниот број, прво се притиска копчето за инверзија, а потоа копчето $\boxed{^{\circ}\,'\,''}$.

Исто така, калкулаторите најчесто имаат две состојби, едната во која се работи со агли во децимални степени, означена со *deg*, а другата во која се работи со агли во радијани, означена со *rad*. Менувањето од една во друга состојба е со притискање на соодветно копче.

Со помош на калкулатори се наоѓаат тригонометриските функции од дадени агли, а и обратно, за дадена тригонометриска функција се наоѓа соодветниот агол. Овие постапки ќе ги разгледаме на следниве два примера.

1. Пресметај со помош на калкулатор:

а) $\sin 41{,}3^0$; б) $\cos 19^0\,21^{'}17^{''}$; в) $tg\dfrac{5\pi}{36}$.

а) На почеток го ставаме калкулаторот во состојба за пресметување на агли во децимални степени и се внесува вредноста $41{,}3^0$. Потоа го притискаме копчето означено со $\boxed{sin}$, со што се добива бараната вредност $\sin 41{,}3^0$.

$$41{,}3^0 \longrightarrow \boxed{sin} = 0{,}660017.$$

б) На почеток потребно е аголот $19^0\,21^{'}17^{''}$ да се претвори во децимална форма, а потоа следува постапката како под а).

$$19^0\,21^{'}17^{''} = 19^0 + \left(\frac{21}{60}\right)^0 + \left(\frac{17}{3600}\right)^0 = 19{,}354722^0;$$

$$19{,}354722^0 \longrightarrow \boxed{cos} = 0{,}943484853.$$

в) Во овој случај го ставаме калкулаторот во состојба за пресметување на агли во радијани. Потоа го притискаме копчето $\boxed{\pi}$ (со што се внесува вредност 3,141592654), множиме со 5, делиме со 36 и на крај притискаме на копчето тангенс ($\boxed{tan}$) со што го добиваме бараниот резултат:

$$tg\frac{5\pi}{36} = 0{,}466307658.\ ♦$$

2. Со помош на калкулатор најди го аголот α ако:

а) $\sin\alpha = 0{,}74281$; б) $\cos\alpha = 0{,}23849$; в) $tg\alpha = 3{,}8611$.

а) Нека калкулаторот е во состојба *deg*. Се внесува вредноста на $\sin\alpha = 0{,}74281$, се притиска копчето $\boxed{inv}$ (или $\boxed{2^{ndf}}$), а потоа се притиска копчето со $\boxed{sin}$. Добиениот резултат е аголот $\alpha = 47{,}9713^0$.

$0{,}74281 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{sin} = 47{,}9713^0.$

со претворање во степени, се добива $\alpha = 57^0 58' 17''$.

Ако калкулаторот има копче $\boxed{sin^{-1}}$, тогаш постапката е следната:

$0{,}74281 \longrightarrow \boxed{sin^{-1}} = 47{,}9713^{\,0}.$

б) $0{,}23849 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{cos} = 76{,}2026^0$; $\alpha = 76^0 12' 9''$.

в) $3{,}82611 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{tg} = 75{,}3527^0$; $\alpha = 75^0 21' 10''$. ♦

Задачи за самостојна работа

Со помош на калкулаторот пресметај ги тригонометриските функции за секој од аглите:

1. а) 48^0; б) $23^0 12' 23''$; в) $16{,}19^0$.

2. а) $\frac{2\pi}{7}$; б) $\frac{5\pi}{21}$.

3. Со помош на калкулатор, најди го острiот агол α ако:

а) $\sin\alpha = 0{,}58362$; б) $\cos\alpha = 0{,}71419$; в) $tg\alpha = 2{,}4183$;

г) $\sin\alpha = \frac{4}{9}$; д) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$; ѓ) $ctg\alpha = \frac{4}{13}$.

4. За $\alpha = 34^0 28'$, пресметај:

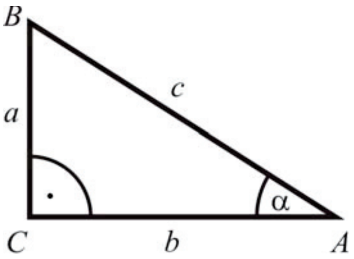
а) $\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha}{2}$; б) $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$.

5*. Пресметај го аголот α ако:

а) $\sin\alpha = tg 23^0 37'$; б) $\cos\alpha = 5 \cdot \sin 11^0$; в) $tg\alpha = \sin 32^0 19' + \cos 59^0 25'$.

4. 4. Врска меѓу тригонометриските функции од ист агол

Познато е дека во правоаголен триаголник ABC (црт.11) важи равенството $a^2 + b^2 = c^2$. Ако тоа равенство се подели со c^2 се добива $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$, односно $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$. Според тоа имаме дека



Црт. 11

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Бидејќи $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ и $\frac{b}{c}=\cos\alpha$, со замена во последното равенство, добиваме

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \qquad (1)$$

1. На пример, за $\alpha=30^0$, имаме дека

$$\sin^2 30+\cos^2 30=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1. \ ♦$$

Со користење на равенството (1) можеме да ја изразиме функцијата синус од произволен остар агол преку функцијата косинус од тој агол и обратно, односно:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ .$$

2. Пресметај го $\cos\alpha$, ако $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}. \ ♦$$

3. Упрости го изразот $(1+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)$.

Со овој пример ќе покажеме како равенството (1) може да се искористи за упростување на изрази. Имено:

$$(1+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha. \ ♦$$

За правоаголниот триаголник ABC (црт. 11) имаме дека:

$$tg\alpha=\frac{a}{b} \ \text{ и } \ ctg\alpha=\frac{b}{a}$$

Ако ги поделиме броителот и именителот на десните страни од овие равенства со $c\,(c\neq 0\,\text{c}\neq 0)$ добиваме

$$tg\alpha=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \ \text{ и } \ ctg\alpha=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}. \qquad (2)$$

Ако се помножат $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ добиваме уште едно равенство

$$\boxed{tg\alpha\cdot ctg\alpha=1} \qquad (3)$$

4. Со директно пресметување се добива дека

$tg60^0 \cdot ctg60^0 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} = \frac{3}{3} = 1$. ♦

5. Пресметај го $tg\alpha$, ако $ctg\alpha = 2$.

Од $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} = \frac{1}{2}$ добиваме дека $tg\alpha = \frac{1}{2}$. ♦

Со помош на основните врски меѓу тригонометриските функции од остри агли дадени со равенствата (1), (2) и (3), ако е позната вредноста само на една од нив, може да се пресметаат вредностите на останатите три од тие функции.

6. Ако $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, пресметај колку е $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \text{ ♦}$$

7. Ако $tg\alpha = 2$, пресметај ги останатите тригонометриски финкции на аголот α.

Од равенката $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ следува дека $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$, односно $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. Од друга страна $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, па $\left(2\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 5\cos^2\alpha = 1$. Според тоа $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$, односно $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Понатаму се пресметува дека

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ и } ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{2}. \text{♦}$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги останатите тригонометриски функции ако е дадено:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; б) $\cos\alpha = 0{,}25$; в) $tg\alpha = \frac{4}{5}$; г) $ctg\alpha = 0{,}41$.

2. Упрости ги изразите:

а) $1-\cos^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha - 1$; в) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

3. Докажи дека:

а) $\sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha = 1$; б) $\sin^2\alpha \cdot \left(1+ctg^2\alpha\right) + \cos^2\alpha \cdot \left(1+tg^2\alpha\right) = 2$.

4. Докажи дека за секој остар агол α важи:

а) $tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = tg^2\alpha - \sin^2\alpha$; б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$;

в) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = tg\alpha - ctg\alpha$;

5*. Докажи дека за секој остар агол α важи:

а) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 2.$

6. Ако $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$, пресметај $\dfrac{5\sin\alpha + \cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

7. Пресметај ја вредноста на изразот $4tg\alpha - 3\sin\alpha$ ако $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

4. 5. Решавање на правоаголен триаголник

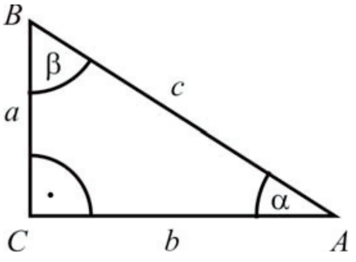
Нека a, b и c се страни на правоаголен триаголник ABC (црт. 12), а α и β се неговите остри агли. Тогаш

$$\alpha + \beta = 90^0 \text{ и } a^2 + b^2 = c^2 .$$

Освен тоа од дефиницијата на тригонометриските функции имаме:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \frac{a}{b} = tg\alpha$$

$$\frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad \frac{a}{b} = ctg\beta$$



Црт. 12

Овие релации ќе ги користиме за пресметување на основните елементи на правоаголниот триаголник (неговите страни и агли) во случај кога е дадена:

- една страна и еден остар агол;
- две страни.

Да се реши правоаголен триаголник значи да се пресметаат сите негови основни елементи врз основа на дадените елементи, од кои барем еден е страна.

1. Да се реши правоаголен триаголник со хипотенуза $c = 93cm$ и агол $\alpha = 42^0 23'$.

Треба да ги пресметаме двете катети a и b и остриот агол β.

Аголот може веднаш да се пресмета: $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 42^0\,23' = 47^0\,37'$.

За да ја пресметаме катетата a, првин пресметуваме $\sin 42{,}3833^0 = 0{,}67409$, а потоа од $a = c \cdot \sin\alpha = 93 \cdot 0{,}67409 \approx 63$ наоѓаме дека $a \approx 63cm$. Катетата b може да ја пресметаме со помош на хипотенузата и косинусот од аголот α или со примена на Питагоровата теорема.

I начин. $b = c \cdot \cos\alpha = 93 \cdot \cos 42{,}3833^0 = 93 \cdot 0{,}73865$, односно $b \approx 69\,cm.$

II начин. $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69\,cm.$ ♦

2. Да се реши правоаголен триаголник со катети $a = 21\,cm$ и $b = 15\,cm.$

Треба да се пресмета хипотенузата и двата остри агли. Хипотенузата ќе ја пресметаме со примена на Питагоровата теорема:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25\,cm.$$

Аголот α ќе го одредиме со помош на функцијата тангенс. Од $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1{,}4$ пресметуваме дека $\alpha \approx 54^0\,28'$. За аголот β имаме дека: $\beta = 90^0 - \alpha \approx 90^0 - 54^0 28'$, односно $\beta \approx 35^0 32'$. ♦

3. Да се реши правоаголен триаголник со катетата $b = 53\ cm$ и агол $\beta = 64^0$.

Според условите на задачата треба да го пресметаме другиот остар агол, катетата и хипотенузата. Пресметуваме: $\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 64^0 = 26^0$;
$a = b \cdot tg\alpha = 53 \cdot tg 26^0 = 53 \cdot 0{,}48773 \approx 26$, односно $a \approx 26\,cm.$ Од $b = c \sin\beta$ имаме дека, $c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{53}{\sin 64^\circ} \approx \frac{53}{0{,}89879}$, односно $c \approx 59\ cm.$ ♦

4. Да се реши правоаголен триаголник со катета $a = 37\,cm$ и хипотенуза $c = 48\,cm.$

Треба да се пресметаат острите агли α и β и катетата b.

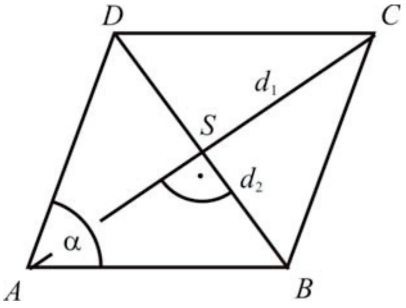
Од $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{37}{48} = 0{,}77083$ имаме дека $\alpha \approx 50{,}42878^0$, односно $\alpha \approx 50^0\,25'\,44''$ и $\beta = 90^0 - \alpha \approx 39^0\,34'\,16''$. Од $b = c \cdot \sin\beta = 48 \cdot \sin 39^0\,34'\,16'' \approx 48 \cdot 0{,}63704 \approx 31$ наоѓаме дека $b \approx 31\,cm.$ ♦

Решавањето на правоаголниот триаголник наоѓа голема примена во решавањето на задачи од областа на планиметријата, но и од секојдневниот живот. Таквата примена ќе ја илустрираме со неколку примери.

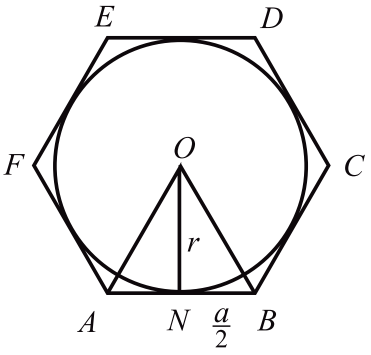
5. Пресметај ја страната на ромб ако е даден неговиот остар агол $\alpha = 66^0$ и една дијагонала $d_1 = 34\,cm.$

Нека се дадени аголот α кај темето A и дијагоналата d_1 повлечена од тоа теме (црт. 13). Од правоаголниот триаголник ABS имаме

$$\frac{d_1}{2} = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}; \quad 17 = a \cdot \cos 33^0; \qquad a = \frac{17}{\cos 33^\circ} = \frac{17}{0{,}83863} \approx 203\,cm. \blacklozenge$$



Црт. 13



Црт. 14

6. Пресметај ја страната на правилен шестаголник ако е познат радиусот на впишаната кружница $r = 12\,cm.$

На цртеж 14 е нацртан правилен шестаголник $ABCDEF$. Триаголникот ABO е рамностран. Аголот BON е 30^0. Од правоаголниот триаголник NBO следува дека:

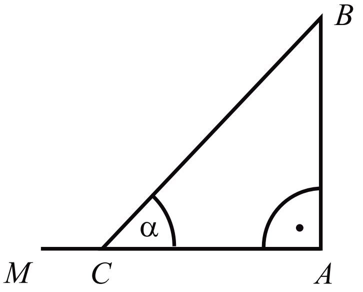
$$\frac{a}{2} = r \cdot tg30^\circ \approx 12 \cdot 0{,}57735 \approx 6{,}9282; \quad a \approx 13{,}85cm. \blacklozenge$$

7. Пресметај го растојанието меѓу точките A и B кои се наоѓаат на различните страни од една река (црт. 15).

Во точката A конструираме прав агол BAM. На крајот од тој агол земаме точка C и го мериме аголот ACB. Нека големината на тој агол е $\alpha = 49^0$. Го мериме растојанието меѓу точките A и C и нека тоа е $d = 28m$. Тогаш имаме

$$\overline{AB} = d \cdot tg\alpha = 28 \cdot tg49^0 \approx 28 \cdot 1{,}15037 \approx 32,$$

$$\overline{AB} \approx 32\,m. \blacklozenge$$



Црт. 15

Задачи за самостојна работа

Да се реши правоаголен триаголник ABC ако:

1. а) $\alpha = 36{,}2^0,\ c = 68cm;$ б) $\beta = 15{,}8^0,\ c = 12{,}2cm;$ в) $\beta = 65{,}4^0,\ a = 2{,}25cm.$

2. а) $\alpha = 82^0,\ b = 246cm;$ б) $\beta = 48^0\,30',\ b = 74{,}7cm;$ в) $\alpha = 24^0,\ a = 5{,}25cm.$

3. а) $a = 230cm,\ c = 320cm;$ б) $a = 52{,}5cm,\ b = 28cm;$ в) $b = 3{,}9cm,\ c = 4{,}5cm.$

4. Радиусот на кружницата е $13cm$, должината на тетивата AB е $10cm$. Пресметај ја големината на аголот AOB.

5. Висината на рамнокракиот трапез е $6cm$, а основите имаат должини $4cm$ и $20cm$, соодветно. Пресметај ги аглите на трапезот.

6*. Над местото *A* се наоѓа авион на висина од 4000 метри. Во тој момент од него се гледа местото *B* под агол од 17º. На колкаво растојание се наоѓа авионот од местото *B* и колкаво е растојанието меѓу местата *A* и *B*?

4. 6. Задачи за вежбање

1. Претвори ги во степени, минути и секунди аглите:

а) $34,41^0$; б) $18,27^0$; в) $23,67^0$.

2. Претвори ги во децимални степени аглите:

а) $36^0 25' 36''$; б) $45^0 11' 19''$; в) $73^0 52' 25''$.

3. Претвори ги во радијани аглите:

а) 25^0; б) $62^0 15'$; в) $35^0 5' 38''$.

4. Претвори ги во степени аглите дадени во радијани:

а) $\frac{7\pi}{12}$; б) 1,27; в) 0,45.

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{\sin 30^0 - \cos 30^0}{5ctg 60^0 tg 30^0}$; б) $\frac{tg 45^0}{2\cos^2 30^0 - 1}$; в) $\frac{tg\alpha \cdot ctg\alpha}{1-\cos\alpha}$, за $\alpha \neq 0$.

6. Најди го аголот α за кој:

а) $\sin\alpha = \cos 65^0$; б) $\cos\alpha = \sin 42^0 50'$;

в) $\sin(\alpha + 20^0) = \sin 50^0$; г) $tg(\alpha - 15^0) = ctg(\alpha + 25^0)$.

7. Пресметај ја вредноста на останатите тригонометриски функции, ако е дадено:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; в) $tg\alpha = \frac{3}{5}$; г) $ctg\alpha = \frac{7}{25}$.

8. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4tg\alpha + 5\cos\alpha$, ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, ако $tg\alpha = 2$.

9. Реши го правоаголниот триаголник *ABC*, ако се дадени:

а) $\alpha = 36^0\,2^{'}$, $c = 68$; б) $\beta = 64^0\,20^{'}$, $a = 450$; в) $\beta = 85^0\,10^{'}$, $b = 0{,}62$;
г) $a = 230$, $c = 320$; д) $b = 3{,}9$, $c = 42{,}5$.

10. Во рамнокрак трапез, познати се основата *a*, кракот *c* и аголот α при основата. Пресметај ги другата основа и висината на трапезот.

11*. Аголот под кој се гледа светилникот од патувачки брод изнесува 25,6°. Откако бродот се доближил за 1050 метри до копното, аголот изнесува 31,2°. На која висина е поставен светилникот, мерејќи од нивото на водата.

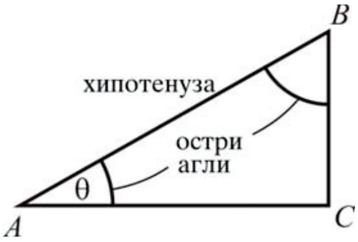
Тематски преглед

Еден степен (1^o) е единица мерка за мерење агли дефинирана како $\frac{1}{360}$ дел од полниот агол. Помали единици мерки се **една минута (1')** која е дефинирана како $\frac{1}{60}$ дел од еден степен и **една секунда (1'')** дефинирана како $\frac{1}{60}$ дел од една минута, односно $\frac{1}{3600}$ дел од еден степен.

Големината на централен агол во кружница чиј соодветен лак има должина еднаква на должината на радиусот на таа кружница, се нарекува **еден радијан** и се означува со **1 rad**.

Врската меѓу двете единици мерки за мерење на агли, степен и радијан е дадена со формулата

$$\boxed{360^0 = 2\pi rad}$$



Во триаголникот ABC аголот при темето C е прав агол, а двата агли при темињата A и B се остри агли.

Ако го означиме со θ остриот агол при темето A тогаш страната BC се вика **спротивна** катета, а страната AC **прилегната** катета за аголот θ.

Функциите кои ја опишуваат зависноста помеѓу должините на страните во правоаголен триаголник и неговите остри агли се викаат **тригонометриски функции.** Тие функции се искажуваат и на следниот начин:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{спротивна катета за } \alpha}{\text{хипотенуза}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилегната катета за } \alpha}{\text{хипотенуза}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{спротивна катета за } \alpha}{\text{прилегната катета за } \alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилегната катета за } \alpha}{\text{спротивна катета за } \alpha}$$

Во табелата се дадени вредности за тригонометриските функции од некои агли:

Степени	Радијани	*sin*	*cos*	*tg*	*ctg*
0^0	0	0	1	0	/
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

Ако α е остар агол во правоаголен триаголник, тогаш

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$$

Ако a, b и c се страни на правоаголен триаголник, а α и β се неговите остри агли, тогаш од дефиницијата на тригонометриските функции имаме:

$$\boxed{\frac{a}{c} = \sin\alpha}, \quad \boxed{\frac{b}{c} = \cos\alpha}, \quad \boxed{\frac{a}{b} = tg\alpha}$$

$$\boxed{\frac{a}{c} = \cos\beta}, \quad \boxed{\frac{b}{c} = \sin\beta}, \quad \boxed{\frac{a}{b} = ctg\beta}$$

Овие релации ќе ги користиме за пресметување на основните елементи на правоаголниот триаголник (неговите страни и агли) во случај кога е дадена:

- една страна и еден остар агол;
- две страни.

Да се реши правоаголен триаголник значи да се пресметаат сите негови основни елементи врз основа на дадените елементи, од кои барем еден е страна.

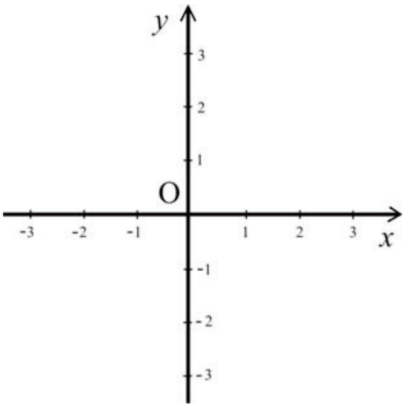
5. ПРАВА ВО РАМНИНА

5. 1. Правоаголен координатен систем во рамнина

Положбата на секоја точка на бројната права е еднозначно определена, со единствен реален број x, наречен **координата на точката**. Слично, користејќи правоаголен координатен систем ќе покажеме дека положбата на секоја точка во рамнината е еднозначно определена, со единствен подреден пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати на точката**.

Правоаголен координатен систем се состои од две заемно нормални бројни оски, наречени **координатни оски**. Точката во која се сечат двете оски се вика **координатен почеток** и вообичаено се означува со O. Хоризонталната оска се вика $x-$оска или **апсцисна оска**, додека вертикалната оска се вика $y-$оска или **ординатна оска**. Рамнината во која е определен координатен систем се вика координатна рамнина.

Вообичаено, на двете координатни оски избираме една иста единица мерка. Како позитивна насока се зема насоката надесно од координатниот почеток, а на ординатната оска нагоре од координатниот почеток (црт. 1).



Црт. 1

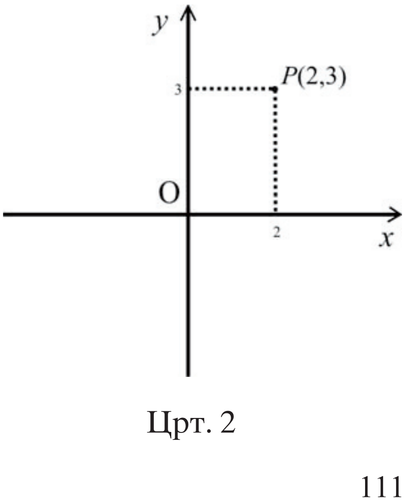
Нека P е произволна точка во координатната рамнина и нека M и N се нејзините проекции на $x-$оската и $y-$оската, соодветно. На точката M на $x-$оската одговара точно еден реален број x. Слично, на точката M на $x-$оската одговара точно еден реален број y. Според тоа положбата на точката P е наполно определена со подредениот пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати** на точката P. Притоа, x се вика **прва координата** или **апсциса**, а y **втора координата** или **ордината** на точката P и запишуваме $P(x, y)$.

1. Точката $P(-3,6)$ има прва координата $x = -3$ и втора координата $y = 6$. ♦

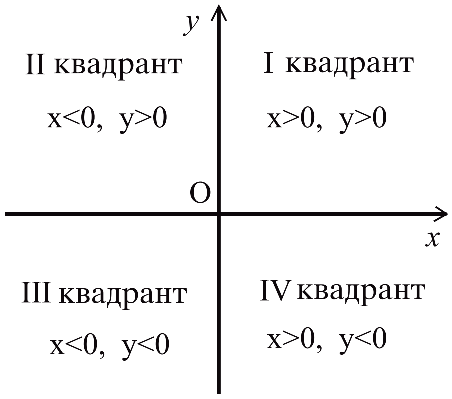
Да се конструира, односно да се нацрта точка $P(x, y)$, значи да се определи пресечната точка на нормалите на координатните оски кои минуваат низ точката P.

2. Конструирај ја точката $P(2,3)$.

Цртаме нормала на $x-$оската низ точката со координата 2. Слично, цртаме нормала на $y-$оската низ точката со координата 3. Пресечната точка на нормалите е бараната точка (црт. 2). ♦



Црт. 2



Црт. 3

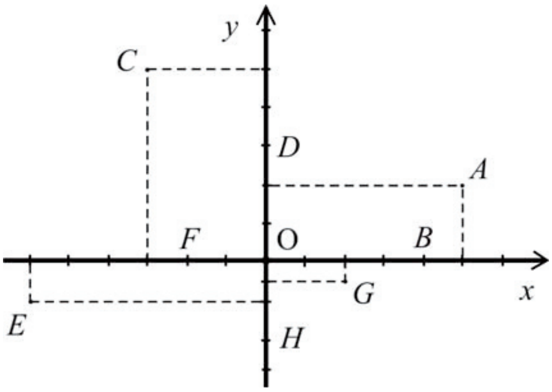
Координатните оски ја разделуваат координатната рамнина на четири делови наречени **квадранти**. Како **I квадрант** се зема делот горе десно, како **II квадрант** се зема делот горе лево, како **III квадрант** се зема делот долу лево и како **IV квадрант** се зема делот долу десно. Според тоа, произволна точка $P(x,y)$ лежи: во I квадрант ако $x>0$ и $y>0$; во II квадрант ако $x<0$ и $y>0$; во III квадрант ако $x<0$ и $y<0$; во IV квадрант ако $x>0$ и $y<0$; на $x-$оската ако $y=0$; на $y-$оската ако $x=0$. Бидејќи координатниот почеток лежи и на $x-$оската и на $y-$оската двете негови координати се еднакви на нула, односно $O(0,0)$ (црт. 3).

3. Конструирај ги во рамнината точките:

а) $A(5,2)$; б) $B(4,0)$; в) $C(-3,5)$; г) $D(0,3)$;

д) $E(-6,-1)$; ѓ) $F(-2,0)$; е) $G\left(2,-\frac{1}{2}\right)$; ж) $H(0,-2)$;

а потоа определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат.



Црт. 4

а) $A(5,2)$ лежи во I-от квадрант
б) $B(4,0)$ лежи на $x-$оската
в) $C(-3,5)$ лежи во II-от квадрант
г) $D(0,3)$ лежи на $y-$оската
д) $E(-6,-1)$ лежи во III-от квадрант
ѓ) $F(-2,0)$ лежи на $x-$оската
е) $G\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ лежи во IV-от квадрант
ж) $H(0,-2)$ лежи на $y-$оската (црт. 4). ♦

Задачи за самостојна работа

1. Определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат точките:

а) $A(3,-4)$; б) $B(-1,1)$; в) $C(-3,-5)$; г) $D(2,3)$;

д) $E(-6,0)$; ѓ) $B\left(0,-\frac{3}{2}\right)$; е) $G\left(\frac{1}{2},0\right)$; ж) $H(0,-1)$.

и определи во кој квадрант или на која оска припаѓаат.

Најди ги координатите на проекциите M, N, P и Q на точките $A(1,3)$, $B(-2,4)$, $C(5,-2)$ и $D(-3,-1)$ на:

2. x – оската; **3.** y – оската.

4. Конструирај ја отсечката AB ако се познати координатите на нејзините крајни точки $A(1,4)$ и $B(5,2)$. Потоа најди ги должините m_x и m_y на нејзините ортогонални проекции на x – оската и y – оската, соодветно.

5*. Конструирај го триаголникот ABC, ако се познати координатите на неговите темиња: $A(1,-3)$, $B(5,2)$ и $C\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

5. 2. Растојание меѓу две точки

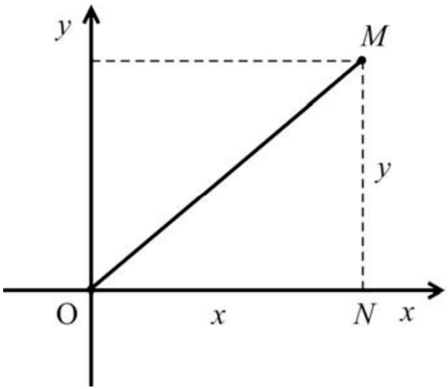
Во оваа лекција со помош на аналитички метод ќе го решиме проблемот на пресметување на растојанието меѓу две точки во координатна рамнина. Имено растојанието d меѓу две дадени точки M_1 и M_2 е должината на отсечката M_1M_2, односно $d = \overline{M_1M_2}$.

Да го решиме поедноставниот случај кога една од дадените точки е координатниот почеток (црт. 5). Нека N е подножјето на нормалата спуштена од точката $M(x,y)$ на x – оската. Од правоаголниот триаголник ONM заради Питагоровата теорема имаме

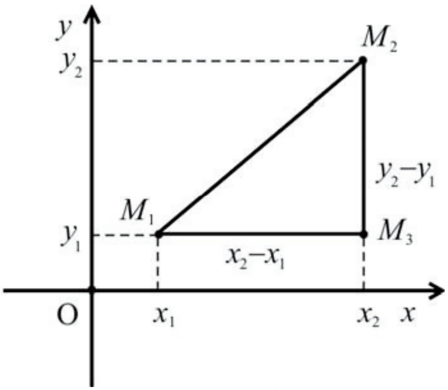
$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

1. Пресметај го растојанието од точката $M(3,4)$ и координатниот почеток.

$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$ ♦



Црт. 5



Црт. 6

Да преминеме на општиот случај. Нека се дадени две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ чие растојание d треба да го најдеме (црт. 6). Да го разгледаме правоаголниот триаголник $M_1M_2M_3$. Должините на неговите катети се $M_1M_2=|x_2-x_1|$ и $M_2M_3=|y_2-y_1|$, соодветно. Растојанието d меѓу точките M_1 и M_2 е должината на хипотенузата M_1M_2, односно

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

2. Пресметај го растојанието меѓу точките $M_1(-2,3)$ и $M_2(0,-2)$.

$d=\sqrt{(0-(-2))^2+((-2)-3)^2}=\sqrt{29}$. ♦

3. Провери дали точките $A(3,-6)$, $B(-2,4)$ и $C(1,-2)$ лежат на една иста права.

Ќе ги пресметаме должините $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ за да провериме дали едната од нив е збир на другите две:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+10^2}=5\sqrt{5},\quad \overline{AC}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5},\quad \overline{BC}=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}.$$

Од $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{BC}$ следува дека дадените точки лежат на една иста права.♦

4. Определи го видот на триаголникот според страните, чии темиња се $A(1,1)$, $B(2,3)$ и $C\left(1,\frac{9}{4}\right)$.

Да ги пресметаме должините на неговите страни $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\qquad \overline{AC}=\sqrt{0^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{5}{4},\qquad \overline{BC}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}.$$

Од $\overline{AB}=\overline{BC}\neq\overline{AB}$ може да заклучиме дека дадениот триаголник е рамнокрак.♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го растојанието d меѓу точките:

а) $M_1(1,-3)$ и $M_2(2,6)$; б) $M_1(0,2)$ и $M_2(0,-2)$;

в) $M_1(-1,-2)$ и $M_2(2,4)$; г) $M_1(1,3)$ и $M_2(7,0)$.

2. Провери дали точките $A(1,-3)$, $B(3,-5)$ и $C(-5,7)$ се темиња на триаголник.

3. Најди ја ординатата на точката B, ако нејзината апсцисата е еднаква на 7, а нејзиниот растојание до точката $A(-1,5)$ е еднакво на 10.

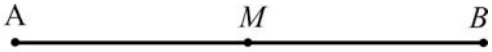
4. Дадени се точките $A(5,8)$ и $B(-11,-2)$. Најди ги координатите на точката C која е симетрична на точката B во однос на точката A.

5*. Дадени се точките $A(1,4)$, $B(3,-9)$ и $C(-5,2)$. Докажи дека тие се темиња на триаголник и најди ја должината на медијаната повлечена од темето B.

5. 3. Делење на отсечка во даден однос

За точката M велиме дека ја дели отсечката AB $(A \neq B)$ во однос λ, сметано од A кон B, ако $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

1. Ако M е средина на отсечката AB, тогаш $\overline{AM} = \overline{MB}$, односно точката M ја дели отсечката AB во однос $\lambda = 1$, сметано од A кон B (црт. 7). ♦



Црт. 7

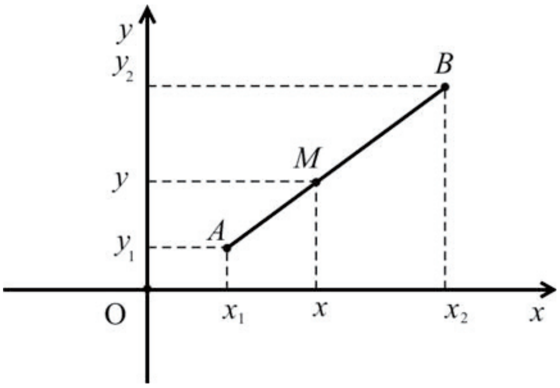
Црт. 8

2. Нека точките P и Q ја делат отсечката AB на три еднакви дела и нека $\overline{AP} < \overline{AQ}$. Тогаш $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{PB}$ и $\overline{AQ} = 2\overline{QB}$, од каде заклучуваме дека точката P ја дели отсечката AB во однос $\frac{1}{2}$, а точката Q во однос 2, сметано од A кон B (црт. 8).♦

Често, наместо да велиме ,,точката M ја дели отсечката AB во однос λ, сметано од A кон B", велиме само ,, точката M ја дели отсечката AB во однос λ", сметајќи притоа дека ознаката AB, а не BA, означува дека делењето е од A кон B.

Бројот λ е поголем од нула ако и само ако точката M лежи меѓу точките A и B. Специјално, $\lambda = 1$ ако и само ако точката M е средина на отсечката AB. Понатаму, $\lambda = 0$ ако и само ако точката M се совпаѓа со точката A. Ако $\lambda = -1$, тогаш $\overline{AM} = -\overline{MB}$, што не е можно. Според тоа $\lambda \neq -1$. Бројот λ е помал од нула и $\lambda \neq -1$ ако и само ако точката M лежи на правата AB, надвор од отсечката AB.

Да ги најдеме координатите на точката $M(x,y)$ која отсечката со крајни точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ ја дели во однос λ (црт. 9).



Црт. 9

Од $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ имаме дека $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ и $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$. Тогаш

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}}$$

Ако $\lambda = \frac{p}{q}$, тогаш

$$\boxed{x = \frac{qx_1 + px_2}{p + q}} \qquad \boxed{y = \frac{qy_1 + py_2}{p + q}}$$

Специјално, ако M е средина на отсечката AB тогаш $\lambda = 1$, па имаме

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

3. Нека е даден триаголникот ABC чии темиња имаат координати $A(-2,-3)$, $B(6,1)$ и $C(-4,5)$. Најди ги координатите на тежиштето на триаголникот.

За определување на координатите на тежиштето ќе го користиме условот дека тежиштето ја дели секоја од тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос 2.

Од $x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$ и $y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$ следува $A_1(2,-1)$.

Тогаш $x_T = \frac{x_A + 2x_{A_1}}{1+2} = \frac{-4+4}{3} = 0$ и $y_T = \frac{y_A + 2y_{A_1}}{1+2} = \frac{5-2}{3} = 1$, па според тоа $T(0,1)$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Нека $A(3,-7)$, $B(5,2)$ и $C(-1,0)$ се темиња на триаголник. Најди ги координатите на средините на неговите страни.

2. Нека $A(1,1)$, $B(5,11)$ и $C(3,-1)$ се темиња на триаголник. Најди ја должината на медијаната повлечена од темето A.

3. Дадени се точките $A(-3,-2)$ и $B(7,3)$. Најди ги координатите на точките кои отсечката AB ја делат на пет еднакви делови.

4. Дадени се точките $A(3,1)$ и $B(8,3)$. Најди ги координатите на точката M која отсечката AB ја дели во однос:
а) $2:3$; б) $3:2$; в) $-2:3$; г) $-3:2$.

5. Најди ги координатите на темињата на триаголникот ABC ако се познати средините на неговите страни $P(3,-2)$, $Q(1,6)$ и $R(-4,2)$.

6*. Нека точките $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ и $C(c_1,c_2)$ се темиња на триаголник. Докажи дека за тежиштето на триаголникот ABC важи $T\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

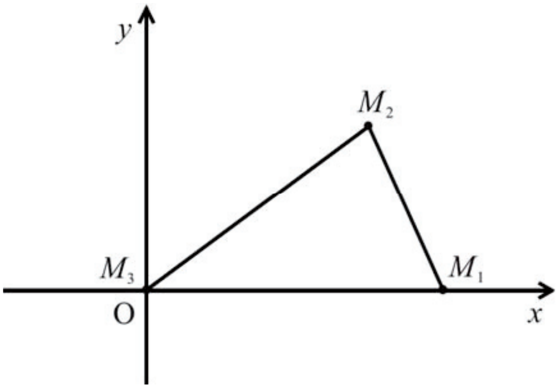
5. 4. Плоштина на триаголник

Да ја пресметаме плоштината на триаголник со дадени темиња $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$. Оваа задача поедноставно е да ја решиме во два чекори.

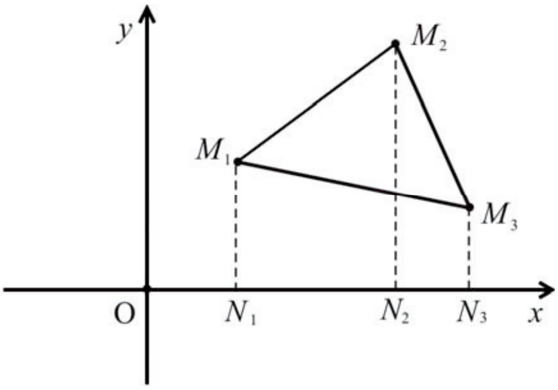
I чекор. Прво ќе ја определиме плоштината на триаголникот ако едно негово теме е координатниот почеток, а другото теме лежи на $x-$оската (црт. 10). Тогаш третото теме лежи или над $x-$оската или под $x-$оската. Користејќи ја формулата дека плоштината на триаголникот P е еднаква на полупроизводот од должината на основата и висината, добиваме дека површината на триаголникот

$$P=\frac{|x_1y_2|}{2}$$

при што користиме апсолутна вредност бидејќи плоштината е позитивна величина, а x_1 или y_2 може да бидат позитивни или негативни.



Црт. 10



Црт. 11

II чекор. Во општ случај (црт. 11) плоштината на триаголник со дадени темиња $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ се пресметува така што од збирот на плоштините на трапезите $N_1M_1M_2N_2$ и $N_2M_2M_3N_3$ се одзема плоштината на трапезот $N_1M_1M_3N_3$, па имаме

$$P=\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)+\frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2)-\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)=$$

$$=\frac{1}{2}[y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)].$$

Ако точката M_2 е под правата определена со точките M_1 и M_3 се добива негативна вредност за плоштината на триаголникот, па треба да користиме апсолутна вредност, бидејќи плоштината е позитивна величина.

$$\boxed{\begin{aligned}P&=\frac{1}{2}|\,y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\,|=\\&=\frac{1}{2}|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|\end{aligned}}.$$

Од формулата за пресметување на плоштина на триаголник може да се добие услов три точки да лежат на една права. Ако три точки лежат на една права, тогаш плоштината на триаголникот чии темиња се тие точки е еднаква на нула.

1. Пресметај ја плоштината на триаголник со темиња $A(1,2)$, $B(-2,3)$ и $C(0,5)$.

Според формулата за пресметување на плоштина на триаголник имаме

$$P=\frac{1}{2}|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|=$$

$$=\frac{1}{2}|\,1(3-5)-2(5-1)+0(2-3)\,|=4$$

од каде следува дека плоштината на триаголникот е 4 единици. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ја плоштината на триаголник со темиња $A(-3,2)$, $B(3,5)$ и $C(1,-3)$.

2. Дали точките $P_1(-3,-3)$, $P_2(3,5)$ и $P_3(6,9)$ се темиња на триаголник?

3. Испитај дали точките $M(1,-3)$, $B(3,5)$ и $C(2,1)$ лежат на иста права.

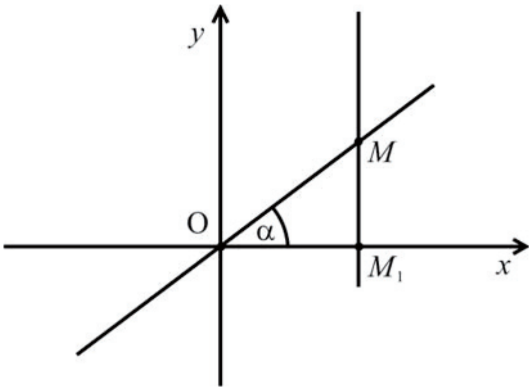
4. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$, ако $A(0,1)$, $B(3,7)$, $C(4,4)$ и $D(1,-2)$.

5. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, ако $A(1,4)$, $B(5,3)$, $C(-3,-5)$ и $D(-2,1)$.

6*. Пресметај ја плоштината на триаголниците APB и BPC, ако $A(1,1)$, $B(-1,-2)$, $C(-4,7)$ и P е средишна точка на страната AC.

5. 5. Експлицитен облик на равенка на права

Бидејќи права е основен геометриски поим кој не се дефинира, за да дојдеме до нејзината равенка, потребно е да искористиме некое нејзино својство. Да ја изведеме најнапред равенката на права која минува низ координатниот почеток и е различна од координатните оски (црт. 12).



Црт. 12

Нека $M(x,y)$ е произволна точка од правата различна од координатниот почеток. Да ги означиме со M_1 ортогоналната проекција на точката M на $x-$оската и со α аголот што го зафаќа правата со позитивната насока на $x-$оската. Тогаш односот

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1O}}=\frac{y}{x}=tg\alpha$$

е константен за произволна положба на точката M. Тој се означува со k и се нарекува **аглов коефициент** или **коефициент на правец** на правата. Оттука следува дека координатите на секоја точка од правата ја задоволуваат равенката

$\boxed{y=kx}$.

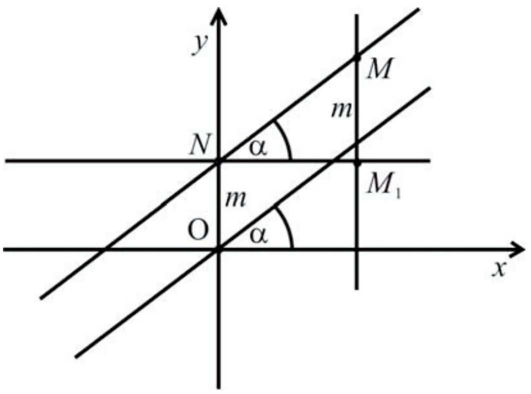
Според тоа, последната равенка претставува равенка на права која минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол α, каде што $k=tg\alpha$.

1. Запиши ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Бидејќи правата минува низ координатниот почеток, нејзината равенка е од облик $y=kx$. Од условот на задачата имаме дека $k=tg\alpha=tg\frac{\pi}{4}=1$. Според тоа, бараната равенка гласи $y=x$. ♦

Нека е дадена произволна права во координатната рамнина. Тогаш можни се следниве три случаи:

- правата ги сече двете координатни оски (црт. 13). Нека $N(0,m)$ е пресечната точка на правата со $y-$оската. Притоа, ординатата на секоја точка од правата е поголема за m, ако m е позитивно или намалена за m, ако m е негативно, во однос на точките од правата што минува низ координатниот почеток и е паралелна на дадената. Двете разгледувани прави зафаќаат еднакви агли со позитивната насока на $x-$оската, па според тоа нивните аглови коефициенти се еднакви. Бидејќи правата која што минува низ координатниот почеток е зададена со равенката



Црт. 13

$$y = kx,$$

за равенката на дадената права добиваме:

$$\boxed{y = kx + m},$$

каде што k е коефициентот на правецот на дадената права, а m е отсечокот на $y-$оската. Добиената равенка се нарекува **експлицитен облик на равенка на права**, а за правата велиме дека е зададена во **експлицитен облик**.

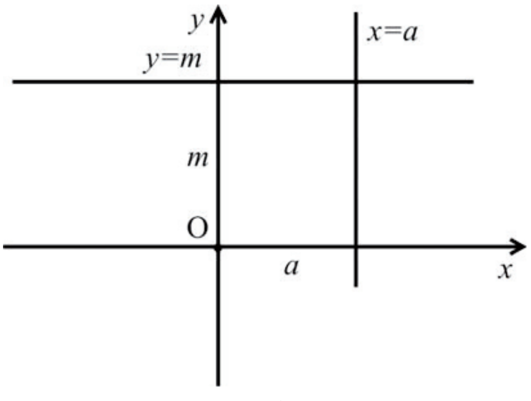
2. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$.

• Според условот на задачата, точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$ се точки од правата, па нивните координати ја задоволуваат равенката $y = kx + m.$ На тој начин доаѓаме до системот $\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$ чии решенија се $k = 3$ и $m = -9$. Според тоа, бараната равенка гласи $y = 3x - 9$. ♦

Имајќи го предвид геометриското значење на агловиот коефициент и отсечокот на ординатната оска во експлицитниот облик на равенка на права може да заклучиме дека:

а) две прави имаат еднакви аглови коефициенти ако и само ако се паралелни;

б) две прави имаат еднакви отсечоци на ординатните оски ако и само ако ја сечат ординатната оска во една иста точка.



Црт. 14

• правата е паралелна со $x-$оската или се совпаѓа со $x-$оската (црт. 14). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од $x-$оската. Бидејќи растојанието од $x-$оската на точка е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со m, за равенката на правата добиваме:

$$\boxed{y = m}$$

Оваа положба на правата може да се третира како специјален случај на претходниот. Имено, во овој случај правата зафаќа агол

$\alpha = 2k\pi,\ k = 0,1,2,...$ со позитивната насока на $\mathrm{x}-$оската, па според тоа агловиот коефициент $k = 0.$ Специјално равенката на $x-$оската е $y = 0;$

• правата е паралелна со $y-$оската или се совпаѓа со $y-$оската (црт. 14). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од $y-$оската. Бидејќи растојанието од $y-$оската на една точка, всушност, е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со $a,$ за равенката на правата добиваме

$\boxed{x = a}$

Специјално $y-$оската е зададена со равенката $x = 0.$

3. Каква е положбата на правите $x = 2$ и $y = 3$ во координатната рамнина?

Правата $x = 2$ е паралелна на $y-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 2 единици од неа, додека правата $y = 3$ е паралелна на $\mathrm{x}-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 3 единици од неа.♦

Задачи за самостојна работа

1. Провери дали точките $M(-1,1),$ $N(2,-3)$ и $P(2,2)$ се точки од правата $y = -x + 4.$

2. Најди ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $\mathrm{x}-$оската зафаќа агол:

а) $\alpha = \dfrac{\pi}{4};$ б) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4};$ в) $\alpha = \pi.$

3. Најди ги агловиот коефициент и отсечокот на $\mathrm{y}-$оската на правата зададена со:

а) $y = 2x - 3;$ б) $y = -x + 3;$ в) $y = -2;$ г) $y = \sqrt{3}x.$

4. Запиши ја равенката на правата која со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ и отсечокот на ординатната оска е еднаков на $-\dfrac{1}{2}.$

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точката $A(-3,2)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = 135^0.$

6. Најди ги агловиот коефициент и отсечокот на ординатната оска што го отсекува правата што минува низ точките $A(2,-1)$ и $B(-3,5).$

7*. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-8)$ и $N(-1,7).$

5. 6. Општ облик на равенка на права

Во претходната лекција за равенка на права во координатната рамнина добивме равенка од прв степен по променливите x и у. Во оваа лекција ќе разгледаме што претставува општа равенка од прв степен со две променливи x и y, односно равенка од обликот:

$$Ax+By+C=0. \qquad (1)$$

Претпоставуваме дека $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Навистина, ако $A=B=0$, тогаш дадената равенката се сведува на равенката $C=0$. Во тој случај, ако $\mathrm{C} \neq 0$ не постојат точки во рамнината кои ја задоволуваат равенката, додека, ако $C=0$, сите точки во рамнината ја задоволуваат равенката.

• Ако $A=0$, тогаш $\mathrm{B} \neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $y=-\frac{C}{B}$. Геометриското место на точки во рамнината коишто ја задоволуваат последната равенка е права паралелна со $x-$оската и минува низ точката $M\left(0,-\frac{C}{B}\right)$.

• Ако $B=0$ тогаш $A \neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $x=-\frac{C}{A}$. Геометриското место на точки во рамнината кои ја задоволуваат последната равенка е права која е паралелна со $x-$оската и минува низ точката $N\left(-\frac{C}{A},0\right)$.

• Ако $A \neq 0$ и $B \neq 0$, тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ која што е равенка на права во експлицитен облик со аглов коефициент $k=-\frac{A}{B}$ и отсечок на $y-$оската $m=-\frac{C}{B}$.

Од направената дискусија може да заклучиме дека равенката од облик

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

е равенка на права, наречена **општ облик на равенка на права**.

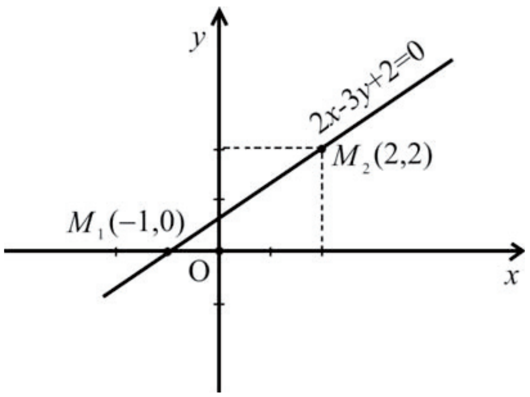
1. Доведи ја во општ облик равенката на правата $y=-\frac{1}{2}x+3$.

Равенка е еквивалентна на равенката $\frac{1}{2}x+y-3=0$, односно на равенката $x+2y-6=0$. ♦

2. Дадена е равенката на права $3x+3y-5=0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

Ако дадената равенка ја решиме според y ја добиваме равенката $y=-x+\frac{5}{3}$, која е еквивалентна на дадената, односно претставува равенка на една иста права во рамнината. Од $k=tg\alpha=-1$ следува дека $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ и $m=\frac{5}{3}$. ♦

3. Конструирај ја правата зададена со равенката $2x-3y+2=0$.



Црт. 15

За да ја решиме поставената задача, доволно е да конструираме две точки од правата а потоа низ нив да ја конструираме правата (црт. 15). Избираме две произволни вредности за x, а потоа ги пресметуваме соодветните вредности за y. Во овој случај згодно е една избрана вредност да биде, на пример, $x_1=2$, бидејќи во тој случај добиваме целобројна вредност за y, $y_1=2$. Слично, можеме да избереме вредност за x, $x_2=-1$, од каде добиваме дека $y_2=0$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Доведи ги во општ облик следниве равенки на права:
а) $y=2x-3$; б) $y=-4$; в) $x=3$.

2. Најди ги коефициентот на правецот и отсечокот на ординатната оска на правите:
а) $2x-y+3=0$; б) $5x+2y-3=0$; в) $3x+8y+16=0$.

3. Дадена е равенката на права $x+y-3=0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

4. Конструирај ги правите зададени со равенките:
а) $y=3x+1$; б) $x=\sqrt{2}$; в) $y=\pi$;
г) $y=2x+2$; д) $y=\frac{1}{3}x-2$; ѓ) $x=0{,}5y-1$.

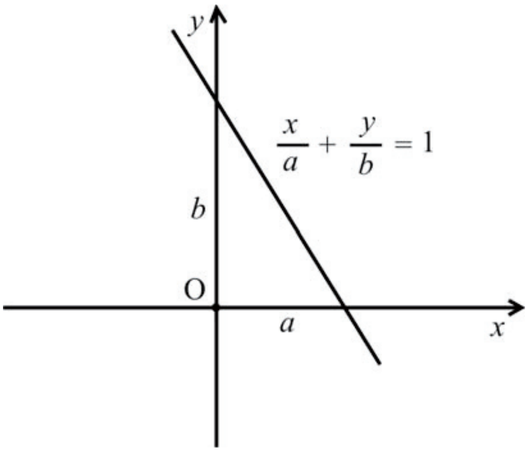
5*. Дали равенките $Ax+By+C=0$ и $\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0$, каде што $\lambda\neq 0$ се равенки на една иста права во координатната рамнина.

5. 7. Сегментен облик на равенка на права

Како што веќе видовме, равенката

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

претставува равенка на права во координатната рамнина. Притоа, правата минува низ координатниот почеток ако и само ако $C = 0$. Коефициентот $A = 0$ ако и само ако правата е паралелна на $x-$оската, додека коефициентот $B = 0$ ако и само ако правата е паралелна на $y-$оската.



Црт. 16

Претпоставуваме дека дадената права не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниту една координатна оска (црт. 16). Тогаш за коефициентите од нејзината равенка важи: $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Ако равенката (1) ја помножиме со бројот $-\frac{1}{C}$, таа го добива обликот

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Ако ставиме $a = -\frac{C}{A}$ и $b = -\frac{C}{B}$, тогаш равенката го добива обликот:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (2)$$

наречен **сегментен облик на равенка на права**.

Да го испитаме геометриското значење на параметрите a и b. Ако во равенката (2) ставиме $y = 0$, а потоа $x = 0$, ги добиваме пресечните точки $P(a,0)$ и $Q(0,b)$ на правата со $x-$оската, односно $y-$оската. Според тоа броевите a и b по апсолутна вредност се еднакви на должините на отсечките што ги отсекува правата од $x-$оската и $y-$оската, соодветно. Нив ги нарекуваме **отсечоци** или **сегменти** на оските.

1. Запиши ја во сегментен облик равенки на права $x - 3y - 6 = 0$, а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од координатните оски.

Дадената равенка на права е равенка од општ облик. Ако равенката ја помножиме со $-\frac{1}{C}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$, ја добиваме равенката $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$ која е еквивалентна со равенката $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$. Последната равенка е запишана во сегментен облик и е еквивалентна на дадената. Должината на сегментот на $x-$оската изнесува 6 единици, додека должината на сегментот на $y-$оската изнесува 2 единици. ♦

2. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $2x-5y-10=0$.

Бидејќи координатните оски се сечат под прав агол, бараниот триаголник е правоаголен со теме при правиот агол во координатниот почеток, катетите лежат на координатните оски, а хипотенузата на дадената права. Знаеме дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на неговите катети, а тоа се токму должините на сегментите отсечени на координатните оски. Ако равенката на правата ја трансформираме до сегментен облик, ја добиваме равенката $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$. Според тоа, должините на сегментите се 5 единици и 2 единици од каде што следува дека бараниот правоаголен триаголник има катети 5 единици и 2 единици. Тогаш неговата плоштина изнесува 5 квадратни единици. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на права:

а) $3x-2y+12=0$; б) $y=-x+1$; в) $y=4x-2$,

а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од кооринатните оски.

2. Најди ја вредноста на параметарот k за која збирот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $2x+5ky-3=0$ е еднаков на 10.

3. Најди ја вредноста на параметарот k за која производот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $6x+5y-12k=0$ е еднаков на $\frac{5}{6}$.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $x+2y-6=0$.

5*. Низ точката $M(4,-3)$ повлечи права која со координатните оски заградува триаголник со плоштина еднаква на 3 квадратни единици.

5. 8. Однос на права и точка

5.8.1. Равенка на сноп прави низ една точка

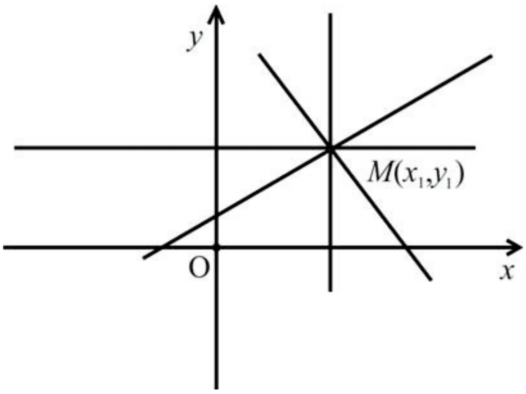
Нека $M(x_1, y_1)$ е фиксна точка во координатната рамнина. Низ дадената точка минуваат безброј прави за кои велиме дека формираат **сноп прави** со центар во точката M (црт. 17). Секоја права низ точката М има општа равенка

$$Ax + By + C = 0.$$

Точката M лежи на правата, па нејзините координати ја задаволуваат равенката на правата, односно важи

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме:



Црт. 17

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентите A и B ги добиваме равенките на различните прави низ точката M.

Од сите прави во снопот прави низ M постои единствена права која е паралелна на $y-$оската. Нејзината равенка гласи $x = x_1$. Единствено таа права нема аглов коефициент и нема отсечок на $y-$оската, па според тоа оваа права не може да се зададе во експлицитен облик. Секоја друга права низ точката M има експлицитна равенка

$$y = kx + n.$$

Бидејќи точката M лежи на правата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството

$$y_1 = kx_1 + n.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме:

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентот k, ги добиваме равенките на различните прави низ точката M, освен правата паралелна со $y-$оската.

1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,2)$ и со позитивната насока на $x-$ оската зафаќа агол $\alpha = 135^0$.

Снопот прави со центар во точката M има равенка $y-2=k(x+3)$. Бидејќи бараната права од снопот со $x-$оската зафаќа агол $\alpha=135^0$, таа има аглов коефициент $k=tg135^0=-1$. Тогаш бараната равенка на права гласи $y-2=-(x+3)$, односно $x+y+1=0$. ♦

5.8.2. Равенка на права низ две точки

Користејќи ја равенката на сноп прави низ една точка, може лесно да ја најдеме равенката на права која минува низ две дадени точки.

1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-12,5)$ и $M_2(8;-3)$.

Снопот прави со центар во M_1 има равенка $y-5=k(x+12)$. Бидејќи бараната права минува низ точката M_2, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството $-3-5=k(8+12)$, од каде што добиваме дека $k=-\frac{2}{5}$. Според тоа, равенката на правата гласи $y-5=-\frac{2}{5}(x+12)$, односно $2x+5y-1=0$. ♦

Примерот што го разгледавме ја открива постапката за наоѓање равенка на права низ две дадени точки. Нека се дадени точките $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, (црт. 18). Ќе ја најдеме равенката на правата што минува низ дадените точки, односно правата M_1M_2.

• Ако $x_1=x_2$, тогаш правата M_1M_2 е нормална на $y-$оската, па нејзината равенка во тој случај гласи

$$\boxed{x=x_1}$$

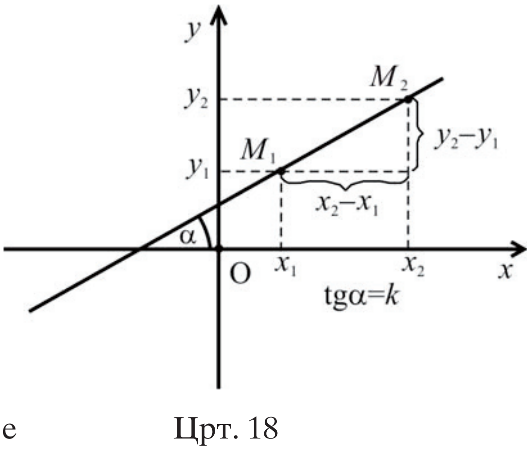
• Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш снопот прави со центар во M_1 има равенка

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Бидејќи правата M_1M_2 минува низ точката M_2 нејзините координати го задоволуваат равенството

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

Тогаш аглoвиот коефициент на правата M_1M_2 е



Црт. 18

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Ако вредноста за k ја замениме во равенката на снопот прави, ја добиваме **равенката на права низ двете дадени точки**:

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

Од равенката на права низ две дадени точки можеме да го изведеме **условот за колинеарност на три точки**. Имено, трета точка $M_3(x_3,y_3)$ лежи на правата определена со точките M_1 и M_2 ако и само ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата определена со двете дадени точки, односно равенката

$$\boxed{y_3-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)}$$

5.8.3. Растојание од точка до права

Наша следна задача е да научиме да пресметуваме растојание од дадена точка до дадена права во координатната рамнина. Како што знаеме, растојанието од точка до права е еднакво на должината на нормалата спуштена од точката кон правата.

Ако равенката на правата е зададена во општ облик

$$Ax+By+C=0,$$

тогаш равенката треба да ја помножиме со нормирачки множител $M=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C. Тогаш растојанието од дадената точка до правата се добива на тој начин што во левата страна од равенката на правата, запишана во облик

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

ги заменуваме координатите на точката, а потоа се зема апсолутна вредност од добиениот број. Конечно добиваме

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

1. Најди ги растојанијата од точките $A(2,1)$ и $B(-2,4)$ до правата $4x-3y+15=0$.

За да го најдеме растојанието од дадената точка до правата, треба равенката да ја множиме со нормирачкиот множител $M=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{1}{\pm 5}$. Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C, па во овој случај $M=-\frac{1}{5}$. Тогаш равенка на правата гласи $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0$. Ако сега ги замениме кооринатите на дадената точка, добиваме $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot 1-3\right|=\left|-4\right|=4$. Бидејќи знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше негативен, точката А и координатниот почеток се на иста страна од правата.

Аналогно, за точката B добиваме $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot(-2)+\frac{3}{5}\cdot 4-3\right|=\left|1\right|=1$. Во овој случај знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше позитивен, па точката B и координатниот почеток се на различни страни од правата.♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на снопот прави што минуваат низ точките:
а) $M(2,-3)$; б) $M(-1,4)$.

2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-2,1)$ и има аглов коефициент $k=-3$.

3. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(4,-7)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha=120^0$.

4. Најди го коефициентот на правецот на правата која минува низ точките:
а) $M_1(-1,4)$ и $M_2(4;-3)$; б) $M_1(0,-2)$ и $M_2(-1;3)$; в) $M_1(1,4)$ и $M_2(-2,4)$.

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M_1(-1,4)$ и $M_2(4,-3)$.

6. Дали точките $M_1(0,3)$, $M_2(2,6)$ и $M_3(-1,-3)$ лежат на иста права?

7. Најди го растојанието од точката $A(-5,-1)$ до правата $4x+3y+30=0$. Дали дадената точка и координатниот почеток се на иста страна од правата?

8. Најди го растојанието на правата $9x-12y+10=0$ од координатниот почеток.

9*. Определи која од точките $M(-3,1)$ и $N(5,4)$ е на помало растојание од правата $x-2y-5=0$. Покажи дека дадената права не ја сече отсечката MN.

10*. Најди ја равенката на правата која е на растојание $d=5$ од точката $C(4,3)$ и отсекува еднакви сегменти на координатните оски.

5. 9. Заемна положба на две прави

5.9.1. Заемна положба на две прави

Како што знаеме, две прави во рамнина може да се сечат, да се паралелни или да се совпаѓаат. Нека се дадени две прави со своите општи равенки:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Ќе ја испитаме зависноста меѓу коефициентите на дадените равенки во секој од наведените три случаи.

• Дадените прави се сечат, односно имаат една заедничка точка ако и само ако системот

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

има единствено решение.

Нека (x_0y_0) е единственото решение на дадениот систем. Ако правата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x_0 + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0 \qquad (2)$$

На сличен начин, ако првата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y_0 + (A_1C_2 - A_2C_1) = 0 \qquad (3)$$

Доволен услов за единственост на решението (x_0, y_0), односно доволен услов за да се сечат дадените прави е нејзините коефициенти да ја задоволуваат релацијата $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, или

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула. Во тој случај решението на дадениот систем гласи:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (4)$$

Добиените броевите се координати на пресечната точка на дадените прави. Навистина, ако добиените вредности за x и y од изразот (4) ги замениме во (1), ќе заклучиме дека равенките (1) преминуваат во идентитети.

1. Покажи дека правите $2x - y - 5 = 0$ и $x + 3y + 1 = 0$ се сечат.

По елиминацијата на y, добиваме $7x-14=0$, од каде што следува дека $x=2.$ Тогаш за y од првата равенка добиваме $y=-1.$ ♦

• За да покажеме дека условот $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ е потребен за да се сечат дадените прави, ќе го разгледаме случајот кога

$$A_1B_2-A_2B_1=0.$$

Ако во тој случај дадените прави имаат уште една зедничка точка (x_1,y_1) од равенствата (2) и (3), следува:

$$C_1B_2-C_2B_1=0 \text{ и } A_1C_2-A_2C_1=0.$$

Од последните три равенства следува дека постои реален број λ таков што $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$ и $C_2=\lambda C_1$. Навистина, бидејќи еден од броевите A_1 или B_1 е различен од нула, може да претпоставиме дека $B_1\neq 0$. Ако ставиме $\lambda=\frac{B_2}{B_1}$ од равенството $A_1B_2-A_2B_1=0$ следува дека $A_2=\lambda A_1$, а од равенството $C_1B_2-C_2B_1=0$ следува дека $C_2=\lambda C_1$. Според тоа, равенката на едната права се добива од равенката на другата права помножена со реален број $\lambda\neq 0.$ Тоа значи дека дадените прави се совпаѓаат. Условот за совпаѓање на две прави гласи:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула.

• Ако $A_1B_2-A_2B_1=0$ и еден од броевите $C_1B_2-C_2B_1$ и $A_1C_2-A_2C_1$ е различен од нула, тогаш системот (1) нема решение, што значи правите се паралелни. Според тоа, потребен и доволен услов дадените прави да бидат паралелни е условот

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}}.$$

2. Покажи дека правите $3x-2y+5=0$ и $4y-6x-1=0$ се паралелни.

Од $\frac{3}{-6}=\frac{-2}{4}\neq\frac{5}{1}$, следува дека правите се паралелни. ♦

5.9.2. Агол меѓу две прави. Услов за нормалност на две прави

Нека се дадени две прави со своите експлицитни равенки:

$$y=k_1x+m_1 \quad \text{и} \quad y=k_2x+m_2.$$

Бидејќи аголот φ под кој се сечат правите не се менува при транслација на правите, аголот што го зафаќаат дадените прави е еднаков на аголот што го зафаќаат правите:

$y = k_1x$ и $y = k_2x.$

Тогаш $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Ако на двете страни од равенството примениме тангенс добиваме

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

или ако знаеме дека

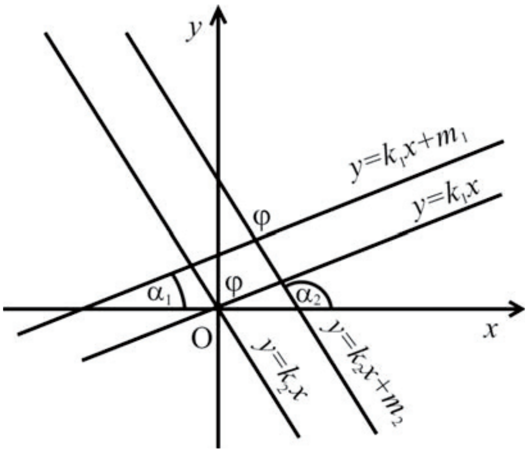
$tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$

добиваме дека

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}}$$

Аголот што се добива од оваа формула е аголот што се добива со ротација на првата права во позитивна насока околу пресечната точка додека не се совпадне со втората права (црт. 19).

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш аголот меѓу нив е $\frac{\pi}{2} - \alpha$, каде што α е аголот што го зафаќа другата права со позитивната насока на $\mathrm{x}-$оската.



Црт. 19

1. Најди го аголот меѓу правите $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0.$

За првата права коефициентот на правецот $k_1 = 2,$ а за втората права $k_2 = -3.$ Според тоа, $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{-3-2}{1+2\cdot(-3)} = 1,$ од каде што следува дека $\varphi = \frac{\pi}{4}.$ ♦

Ако правите се нормални, тогаш $k_2 = tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1},$ од каде што следува дека $k_2 = -\frac{1}{k_1}.$ Според тоа, **условот за нормалност на две прави** гласи:

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}.$$

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш тие се нормални ако и само ако другата права е паралелна со $x-$оската.

2. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $M(-1{,}1)$ и е нормална на правата чија равенка е $3x - y + 2 = 0.$

Равенката на снопот прави низ точката M гласи $y + 1 = k(x-1).$ Треба да ја определиме равенката на онаа права од снопот која е нормална на дадената права, односно на правата $y=3x-2$. Од условот за нормалност на две прави, добиваме дека $k=-\frac{1}{3}$. Според тоа равенката на бараната права гласи $x+3y+2=0$. ♦

Ако правите се зададени со своите општи равенки:

$A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$

тогаш изразувајќи ги коефициентите k_1 и k_2 преку коефициентите A_1, B_1, A_2 и B_2 имаме:

$$k_1=-\frac{A_1}{B_1} \text{ и } k_2=-\frac{A_2}{B_2},$$

од каде што за аголот меѓу две прави добиваме дека

$$\boxed{tg\varphi=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}} \text{ за } A_1A_2+B_1B_2\neq 0 \text{ и } \boxed{\varphi=\frac{\pi}{2}} \text{ за } A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Ако правите се зададени со општи равенки, условот за нормалност гласи:

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0}$$

Задачи за самостојна работа

1. Утврди кои од следниве прави се сечат, кои се паралелни, а кои се совпаѓаат. Во случај кога правите се сечат, најди ја пресечната точка:

а) $3x-2y+1=0$ и $2x+5y-12=0$;

б) $3x+y-17=0$ и $6x+2y+12=0$;

в) $2x-y+3=0$ и $6x-3y+9=0$.

2. Најди ги пресечните точки на координатните оски со правите:

а) $x+10y-5=0$; б) $2x-3y+12=0$.

3. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $A(-2,3)$ и е паралелна на правата $5x-6y+7=0$.

4. Најди го аголот меѓу правите $2x-y+7=0$ и $3x+y+10=0$.

5. Најди ја правата која минува низ точката $A(-2,8)$ и зафаќа агол $\varphi=\frac{\pi}{4}$ со правата $y=3x-5$.

6*. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $A(3,15)$ и е нормална на правата $3x-5y+8=0$.

5. 10. Задачи за вежбање

1. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако $A(-5,5)$, $B(7,-3)$ и $C(3,1)$.

2. Најди ги координатите на точката M која ја дели отсечката AB во однос λ, ако:

а) $A(10,3)$, $B(-2,-5)$ и $\lambda = \frac{1}{3}$; б) $A(-2,-5)$, $B(13,5)$ и $\lambda = \frac{3}{2}$.

3. Точките $A(1,1)$, $B(-1,3)$ и $C(2,0)$ лежат на една права. Определи го односот λ во кој точката A ја дели отечката CB.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(0,0)$, $B(3,-2)$ и $C(1,5)$.

5. Најди ја равенката на правата која минува низ точките $\mathrm{M}_1(-7,2)$ и $\mathrm{M}_2(3,-5)$.

6. Докажи дека точките $A(1,9)$, $B(-2,3)$ и $C(-5,-3)$ лежат на една права.

7. Дадени се точките $A(-2,-1)$, $B(1,2)$ и $C(-1,4)$. Запиши ги координатите на точката D, ако $ABCD$ е паралелограм.

8. Најди го растојанието d од точката $M(2,3)$ до правата:

а) $3x+4y-25=0$; б) $12x-5y+4=0$.

9. Запиши ги равенките на медијаните на триаголникот ABC, ако $A(3,2)$, $B(5,4)$ и $C(1,4)$.

10. Даден е триаголник ABC. Запиши ги координатите на:

а) тежиштето T на триаголникот, ако $\mathrm{A}(-8,1)$, $\mathrm{B}(1,2)$ и $\mathrm{C}(-5,-3)$;

б) ортоцентарот H на триаголникот, ако $A(-4,8)$, $B(1,-7)$ и $C(7,5)$.

11. Најди ги координатите на точката M која е симетрична на точката $N(3,2)$ во однос на правата $x-y+5=0$.

12*. Пресметај ја плоштината на даден квадрат, ако две негови страни лежат на правите $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$.

13*. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,8)$ и со координатните оски заградува триаголник со плоштина $P=6$.

14*. Најди го агловиот коефициент на висините на триаголникот ABC, ако $A(-2,1)$, $B(3,4)$ и $C(1,-2)$.

Тематски преглед

Правоаголен координатен систем се состои од две заемно нормални бројни оски, наречени **координатни оски**. Точката во која се сечат двете оски се вика **координатен почеток** и вообичаено се означува со O. Хоризонталната оска се вика $x-$оска или **апсцисна оска**, додека вертикалната оска се вика $y-$оска или **ординатна оска**. Рамнината во која е определен координатен систем се вика **координатна рамнина**.

Положбата на точка во координатната рамнина е наполно определена со подреден пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати** на точката. Притоа, x се вика **прва координата** или **апсциса**, а y **втора координата** или **ордината** на точката.

Координатните оски ја разделуваат координатната рамнина на четири делови наречени **квадранти**. Како **I квадрант** се зема делот горе десно, како **II квадрант** се зема делот горе лево, како **III квадрант** се зема делот долу лево и како **IV квадрант** се зема делот долу десно.

Растојанието меѓу две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ во координатна рамнина се пресметува по формулата

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

Координатите на точката $M(x, y)$ која отсечката со крајни точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ја дели во однос λ се пресметуваат со формулите

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}} \qquad \boxed{y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}}$$

Ако $\lambda=\frac{p}{q}$, тогаш

$$\boxed{x=\frac{qx_1+px_2}{p+q}} \qquad \boxed{y=\frac{qy_1+py_2}{p+q}}$$

Специјално, ако M е средина на отсечката AB тогаш $\lambda=1$, па имаме

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}} \qquad \boxed{y=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

Плоштината на триаголник со дадени темиња $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ се пресметува по формулата

$$\boxed{\begin{aligned}P&=\frac{1}{2}|\,y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\,|=\\&=\frac{1}{2}|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|.\end{aligned}}$$

Од формулата за пресметување на плоштина на триаголник може да се добие услов три точки да лежат на една права. Ако три точки лежат на една права, тогаш плоштината на триаголникот чии темиња се тие точки е еднаква на нула.

Видови равенка на права во рамнина

- експлицитен облик на равенка на права гласи

$$\boxed{y=kx+m}$$

каде што k е коефициентот на правецот на дадената права, а m е отсечокот на $y-$оската.

- **општ облик на равенка на права** гласи

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

- **сегментен облик на равенка на права** гласи

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

каде броевите a и b по апсолутна вредност се еднакви на должините на отсечките што ги отсекува правата од $x-$оската и $y-$оската, соодветно. Нив ги нарекуваме **отсечоци** или **сегменти** на оските.

- **равенка на сноп прави низ точка** $M(x_1,y_1)$ гласи

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1)}$$

- **равенка на права низ две точки** $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ гласи

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

Условот за колинеарност на точките $M_1(x_1,y_1)$, и $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ гласи

$$\boxed{y_3-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)}$$

Растојанието d од точката $M(x_1,y_1)$ до правата $Ax+By+C=0$ се пресметува по формулата

$$\boxed{d=\frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Две прави со равенките $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ се:

- сечат ако и само ако

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}}$$

при што координатите на пресечната точка се зададени со формилите

$$x_0=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \qquad y_0=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

- совпаѓаат ако и само ако

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}},$$

- паралелни ако и само ако

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}}.$$

Аголот φ под кој се сечат правите $y=k_1x+m_1$ и $y=k_2x+m_2$ зададени со своите експлицитни равенки се пресметува по формулата

$$\boxed{tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}}$$

Условот за нормалност на две прави гласи

$$\boxed{k_2=-\frac{1}{k_1}}$$

Аголот φ под кој се сечат правите $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ зададени со своите општи равенки се пресметува по формулата

$$\boxed{tg\varphi=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}}$$

Тогаш **условот за нормалност** на две прави гласи

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0}$$

6.

ПРОГРЕСИИ

6. 1. Поим за низа

Во обичниот живот често се сретнуваме со поимот за подредување во низа, на пример, низа од еднородни или разнородни предмети. Меѓутоа во математиката поимот за низа има поконкретно значење.

Постојат конечни и бесконечни низи. Кај конечните низи имаме конечен број на објекти подредени во некој ред, при што точно знаеме кој елемент е прв, кој е втор итн. Да претпоставиме дека имаме пет елементи од некое множество. Првиот елемент го означуваме со a_1, вториот елемент со a_2, треиот со a_3, четвртиот со a_4 и петтиот со a_5. На тој начин низата ја запишуваме во следниот облик a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, или $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

Притоа да напоменеме дека елементите a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 можат да бидат елементи на било кое множество. Во математиката најчесто тоа се броеви (природни, цели, рационални или реални), но тоа не мора секојпат да биде така.

На пример, секој збор може да се третира како низа од букви. Во овој случај елементите a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 припаѓаат на некоја азбука. Бројот 5 претставува **должина** на разгледуваната конечна низа и должината не мора секојпат да биде иста. На пример, зборот „економија“ може да се разгледува како конечна низа со должина 9 бидејќи имаме збор со 9 букви. Да воочиме дека секоја конечна низа може да се разгледува како пресликување од некое подмножество од множеството на природните броеви $\{1,2,3,...\}$ во разгледуваното множество. Така зборот „економија“ можеме да го разгледуваме како пресликување:

$1 \to$ е, $2 \to$ к, $3 \to$ о, $4 \to$ н, $5 \to$ о, $6 \to$ м, $7 \to$ и, $8 \to$ ј, $9 \to$ а.

Од претходното можеме да констатираме дека: **секоја конечна низа** $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ **претставува пресликување од множеството {1,2,3,...,n} во разгледуваното множество и притоа елементот што соодветствува на бројот** i, $1 \le i \le n$**, се означува со индекс** i, на пример, $a_i, b_i, x_i, ...$. Освен тоа, конечната низата $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, вообичаено се означува со (a_i).

Често пати има потреба да работиме со бесконечни низи. Нив ги означуваме со $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ или кратко со (a_i), при што a_i го означува елементот што стои на i-тото место, каде $i \in \{1,2,3,...\}$ е било кој природен број. Најчесто елементите $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ се некои броеви, па во општ случај можеме да сметаме дека тие се реални броеви.

Дефиниција 1. Под низа подразбираме пресликување од множеството на природните броеви во множеството на реалните броеви.

Значи, под низа ќе подразбираме бесконечна низа, а ако сакаме да нагласиме дека имаме конечна низа тоа обично го нагласуваме.

1. Да ја разгледаме низата 1,3,5,7,9,11,13,... Во овој случај пресликувањето е зададено со

$f(1)=1,\quad f(2)=3,\quad f(3)=5,\quad f(4)=7,\quad f(5)=9,\quad f(6)=11, ...$

а тоа кратко можеме да го запишеме како:

$f(n)=2n-1$, или како $a_n=2n-1$. ♦

2. Првите неколку членови на низата $a_n=n+\frac{1}{n}$ се $a_1=1+1=2$, $a_2=2+\frac{1}{2}=2{,}5$, $a_3=3+\frac{1}{3}=3{,}333...$, $a_4=4+\frac{1}{4}=4{,}25$, $a_5=5+\frac{1}{5}=5{,}2$, итн. ♦

3. Првите неколку членови на низата $a_n=n^2+n+1$ се $a_1=1^2+1+1=3$, $a_2=2^2+2+1=7$, $a_3=3^2+3+1=13$, $a_4=4^2+4+1=21$, $a_5=5^2+5+1=31$, итн. ♦

4. Првите неколку членови на низата $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ се $a_1=-1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=-\frac{1}{3}$, $a_4=\frac{1}{4}$, $a_5=-\frac{1}{5}$, итн. ♦

5. Низата $a_n=8$ е зададена со 8, 8, 8, 8, 8, 8,... Значи независно од индексот n, a_n има вредност 8. Ваквите низи, каде a_n има иста вредност за секој индекс n ги нарекуваме **константни низи**. ♦

6. Да ја разгледаме низата со општ член $a_n=3+(-1)^n$. Задавајќи вредности 1,2,3,... за n оваа низа можеме да ја запишеме како 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4,.... ♦

Задачи за самостојна работа

1. Што е низа? Наведи пример на конечна и пример на бесконечна низа.

2. Запиши ги првите 5 члена на низата (a_n), каде:

а) $a_n=\frac{n+1}{n+2}$, б) $a_n=\frac{1}{n^2}$, в) $a_n=2^n$, г) $a_n=(-1)^n n$.

3. Да се најде n–тиот член на низата (a_n), ако:

а) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$ за $n=4$, б) $a_n=n^n$ за $n=3$, в) $a_n=3^n$ за $n=4$.

4. За која вредност на n низата со општ член $a_n=(-1)^n n$ добива вредност 2010?

5. За која вредност на n низата со општ член $a_n = 4n - 5$ добива вредност 999?

6. Најди го четвртиот член на низата, со општ член:

а) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, б) $a_n = \frac{1}{n+1}$, в) $a_n = (-2)^n$, г) $a_n = 3$.

7*. Од првите пет членови на дадената низа да се определи формула со која би можела да се опише таа низа.

а) 3, 5, 7, 9, 11,... б) 1, 4, 9, 16, 25,... в) 1, 3, 1, 3, 1,...

г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ д) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$

6. 2. Растечки и опаѓачки низи

Низите можат да задоволуваат некои својства. Тие својства најчесто се условите за растење и опаѓање.

Дефиниција 1. За низата (a_n) велиме дека е:

- растечка (или монотоно растечка), ако за секој природен број k важи
$$a_{k+1} > a_k, \tag{1}$$
- опаѓачка (или монотоно опаѓачка), ако за секој природен број k важи
$$a_{k+1} < a_k, \tag{2}$$
- нерастечка, ако за секој природен број k важи
$$a_{k+1} \le a_k, \tag{3}$$
- неопаѓачка, ако за секој природен број k важи
$$a_{k+1} \ge a_k. \tag{4}$$

Условот (1) за растење на една низа покажува дека секој нареден член на низата е поголем од претходниот член.

1. Да ја разгледаме низата со општ член $a_n = 3n - 2$. Оваа низа е растечка бидејќи $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$, односно 1<4<7<10<... . Непосредно се уверуваме дека:

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - [3n - 2] = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 > 0,$$

па оттука е $a_{n+1} > a_n$ за секој природен број n. ♦

Условот (2) за опаѓање на една низа покажува дека секој нареден член на низата е помал од претходниот член.

2. Да ја разгледаме низата со општ член $a_n = \frac{1}{n}$. Оваа низа е опаѓачка бидејќи $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$, односно $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \ldots$. Непосредно се уверуваме дека:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

па оттука е $a_{n+1} < a_n$ за секој природен број n. ♦

Условот (3) покажува дека секој нареден член на низата е поголем или еднаков на претходниот член, т.е. не е помал од претходниот член.

3. Да ја разгледаме низата 1,1,2,2,3,3,4,4,.... Оваа низа е неопаѓачка бидејќи $1 \le 1 \le 2 \le 2 \le 3 \le 3 \le 4 \ldots$ Низата не е растечка бидејќи вториот член не е поголем од првиот и нема потреба понатаму да се проверува. ♦

Условот (4) покажува дека секој нареден член на низата е помал или еднаков на претходниот член, т.е. не е поголем од претходниот член.

4. Да ја разгледаме низата $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ Оваа низа е нерастечка бидејќи $1 \ge 1 \ge \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2} \ge \frac{1}{3} \ge \frac{1}{3} \ge \frac{1}{4} \ge \frac{1}{4} \ge \ldots$ Низата не е растечка бидејќи вториот член не е поголем од првиот и нема потреба понатаму да се проверува. ♦

Да напоменеме дека не секоја низа мора да задоволува некое од својствата (1), (2), (3) и (4). Таква е низата 1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,.... Но често пати иако некој од условите (1), (2), (3) и (4) не е задоволен, ако тој услов е задовелен за оние вредности на k кои се поголеми од некој број k_0, тогаш се договараме да велиме дека соодветната низа е растечка, односно опаѓачка, односно нерастечка, односно неопаѓачка.

5. Да ја разгледаме низата 3, 2, 1, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, 1\frac{5}{6}, \ldots$ Оваа низа иако не е растечка според дефиниција 1, бидејќи 3>2, за неа можеме да кажеме дека е растечка во поширока смисла бидејќи почнувајќи од третиот член низата е растечка, односно $1\frac{1}{2} < 1\frac{2}{3} < 1\frac{3}{4} < 1\frac{4}{5} < 1\frac{5}{6} < \ldots$ Овој договор го прифаќаме бидејќи најчесто нам ни е важно како се однесуваат членовите на низата за големи вредности на индексот. ♦

6. Да ја разгледаме низата 1, 2, 1, 2, 1, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6}, \ldots$ Оваа низа иако не е опаѓачка според дефиниција 1, за неа можеме да кажеме дека е опаѓачка во поширока смисла, бидејќи почнувајќи од шестиот член низата е опаѓачка односно $1\frac{1}{2}>1\frac{1}{3}>1\frac{1}{4}>1\frac{1}{5}>1\frac{1}{6}>...$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои низи се растечки, неопаѓачки, опаѓачки, нерастечки?

2. Наведи примери на растечки, неопаѓачки, опаѓачки и нерастечки низи.

3. Дали низата $a_n=\frac{n}{n+1}$ е растечка или опаѓачка?

4. Кои од низите:

а) $a_n=\frac{n}{n+2}$, б) $a_n=\frac{1}{3^n}$, в) $a_n=\frac{1}{n^2+(-1)^{n+1}}$, г) $a_n=2^n-5$, д) $a_n=\frac{5^n}{n}$,

се растечки, а кои се опаѓачки?

5. а) Дали една низа може да биде истовремено и растечка и опаѓачка?
б) Константната низа дали е растечка или опаѓачка?

6*. За кои вредности на позитивниот број a следната низа $a_n=a^n$ е:
а) растечка, б) опаѓачка, в) константна?

6. 3. Аритметичка прогресија

Во оваа тема ќе се запознаеме со два специјални видови на низи: аритметички низи и геометриски низи и тие вообичаено се нарекуваат соодветно аритметичка и геометриска прогресија.

Да ја разгледаме низата од прирдоните броеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Оваа низа е аритметичка низа (прогресија) бидејќи $2-1=3-2=4-3=...$, односно разликата на секои два последователни членови на низата е константен број. Тргнувајќи од ова својство ја даваме следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Една низа (a_n) се нарекува аритметичка (аритметичка прогресија) ако разликата $a_{n+1}-a_n$ помеѓу два последователни членови на низата е број кој не зависи од n, односно постои реален број d, така што за секој природен број n да важи $a_{n+1}-a_n=d$. Бројот d се нарекува разлика.

Покрај примерот со природните броеви, ќе дадеме и други примери.

1. Низата $-4,-1,2,5,8,11,14,...$ е аритметичка бидејќи секој нареден член се добива со додавање на бројот 3, имено, $-4+3=-1$, $-1+3=2$, $2+3=5$, $5+3=8$, $8+3=11$,... Во овој случај е $d=3$. ♦

2. Низата $5,3,1,-1,-3,-5,-7,...$ е аритметичка бидејќи секој нареден член се добива со додавање на бројот -2, имено, $5-2=3$, $3-2=1$, $1-2=-1$, $-1-2=-3$, $-3-2=-5$,... Во овој случај е $d=-2$. ♦

3. Низата 6, 6, 6, 6, 6, 6,... е аритметичка бидејќи секој нареден член се добива со додавање на бројот 0. Во овој случај е $d=0$. Всушност, секоја константна низа е аритметичка прогресија. ♦

Забележуваме дека со задавање на првиот член a_1 и разликата d, аритметичката прогресија е еднозначно зададена. Имено, членовите на низата се:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d$$

....

Продолжувајќи ја оваа постапка за членот a_k добиваме:

$$a_k = a_1 + (k-1)d. \qquad (1)$$

Ова е всушност и бараната формула за општиот члена на низата. Навистина, за k=1 се добива $a_1 = a_1$, а за a_{k+1} повторно го добива истиот облик:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)\,d + d = a_1 + kd.$$

Според тоа, заклучуваме дека за секој природен број k општиот член е:

$$\boxed{a_k = a_1 + (k-1)d.}$$

4. Една фабрика за чевли во првата година од основањето произвела 50000 пара чевли, а секоја наредна година производството го зголемувала за 3000 пара чевли. Колку пара чевли произвела фабриката во осмата година од своето постоење?

Со a_k да го означиме производството на парови чевли во k-тата година од своето постоење. Очигледно, ова претставува аритметичка прогресија со почетна вредност $a_1 = 50000$ и разлика $d = 3000$. Користејќи ја формулата (1) за $k=8$ добиваме $a_8 = a_1 + (8-1)d = 50000 + 7 \cdot 3000 = 71000$.

Значи, во осмата година фабриката произвела 71 000 пара чевли. ♦

5. Првиот член на една аритметичка прогресија е 8, 15-тиот член на прогресијата е еднаков на 50. Колкава е разликата d?

Со решавање на равенката (1) по однос на d добиваме:

$$d = \frac{a_k - a_1}{k-1}\ .$$

Заменувајќи ги дадените вредности од условот на задачата добиваме:

$$d = \frac{a_k - a_1}{k-1} = \frac{50-8}{15-1} = \frac{42}{14} = 3\,. \ ♦$$

6. Првиот член на една аритметичка прогресија е -3, а разликата е $d = -2$. Да се најде кој член на низата е еднаков на -19?

Со решавање на равенката (1) по однос на k добиваме:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1\,.$$

Заменувајќи ги дадените вредности од условот на задачата добиваме:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{-19-(-3)}{-2} + 1 = \frac{-19+3}{-2} + 1 = \frac{-16}{-2} + 1 = 9\,.$$

Значи, деветтиот член на низата прима вредност -19. Решението за бројот k има смисла само ако неговата вредност е природен број. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Да се пресмета 150-тиот непарен број.

2. Да се пресмета 75-тиот парен број.

3. Да се определи првиот член на една аритметичка прогресија чија разлика е 2,3 ако 85-тиот член е еднаков на 270,8.

4. Кои од следните низи се аритметички прогресии:

а) 2, 8, 14, 20, 26, ...,$6n$-4,... б) 1, 8, 27, 81, ..., n^3,...

в) $9, 4, -1, -6, -11, ..., 14-5n, ...$ г) 1, 2, 4, 8, 16, ...,2^{n-1},...?

За оние низи кои се аритметички прогресии да се најде почетниот член и разликата.

5. Долгот на една работна организација на 1 јануари 2000 година бил 50000 евра, а секоја наредна година се намалувал за 3500 евра. После колку години долгот бил 22000 евра?

6*. Петтиот член на една аритметичка прогресија е еднаков на 12, дванаесеттиот член на истата аритметичка прогресија е еднаков на 33. Колкава е разликата и колкав е првиот член на таа аритметичка прогресија?

7. Ако во артметичката прогресија $-3,1,5,9,13,17,...$ ги прецртаме членовите што стојат на парните места, каква низа ќе се добие?

8*. Јован секој месец заштедувал по иста сума на пари и имал некоја почетна сума на пари. После 16-тиот месец откако почнал да штеди Јован имал 54000 денари, а после 27-миот месец откако почнал да штеди Јован имал 81500 денари. Колку пари имал Јован кога почнал да штеди и по колку пари заштедувал секој месец?

6. 4. Својства на аритметичката прогресија

А. Да го разгледаме следниов пример.

1. За конечната аритметичка прогресија $1,4,7,10,13,16$, важат равенствата:
$1+16=4+13=7+10=10+7=13+4=16+1$. ♦

Во општ случај, нека е дадена конечната аритметичка прогресија:
$a_1,a_2,a_3,...,a_m,...,a_{n-2},a_{n-1},a_n$.
Да ги разгледаме паровите членови:
$(a_1;a_n)$, $(a_2;a_{n-1})$, $(a_3;a_{n-2})$, . . . ,$(a_m;a_{n-m+1})$, . . ., $(a_n;a_1)$,
чии збирови на индексите е еднаков на $n+1$, ($1+n=n+1$, $2+(n-1)=n+1$, $3+(n-2)=n+1$,..., $m+(n-m+1)=n+1$,...). За овие парови велиме дека се **еднакво оддалечени од крајните членови** a_1 и a_n. Бидејќи:
$a_m=a_1+(m-1)d$ и $a_{n-m+1}=a_1+(n-m)d$:
со нивно собирање се добива
$a_m+a_{n-m+1}=a_1+(m-1)d+a_1+(n-m)d=a_1+a_1+(n-1)d=a_1+a_n$.
Забележуваме дека овој збир не зависи од бројот m. Значи,
$a_m+a_{n-(m-1)}=a_1+a_n$, за m=1,2,3,...,n.
Со тоа го покажавме следното својство:

1°. Во произволна аритметичка прогресија, збирот на кои било два члена кои се еднакво оддалечени од крајните членови a_1 и a_n е еднаков на збирот на крајните членови a_1+a_n.

2. Да ја разгледаме аритметичката прогресија $5,7,9,11,13,15,17,...$ За $n=5$ претходното својство покажува дека:
$5+13=7+11=9+9=11+7=13+5 \quad (=18)$,
додека за $n=6$ претходното својство покажува дека:
$5+15=7+13=9+11=11+9=13+7=15+5 \quad (=20)$. ♦

3. Да ја разгледаме низата од пример 2. Забележуваме дека вториот член (7) е аритметичка средина од првиот (5) и третиот (9), третиот член (9) е аритметичка средина од вториот (7) и четвртиот (11),... ♦

Ова својство важи и во општ случај.

> **2⁰.** Во произволна аритметичка прогресија, a_m е аритметичка средина од a_{m-1} и a_{m+1}, односно за $1 < m$ важи $a_m = \dfrac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$.

Б. Често пати се јавува потреба да се пресмета збирот на првите *n* собироци од една аритметичка прогресија зададена со првиот член a_1 и разликата *d*. Бараниот збир ќе го означиме со S_n, односно:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

Забележуваме дека тогаш важи исто така:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1.$$

Со собирање на последниве две равенства добиваме:

$$2S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_n + a_1).$$

Од $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = ...$ понатаму добиваме $2S_n = n(a_1 + a_n)$,

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}. \qquad (1)$$

Ако во оваа формула замениме дека $a_n = a_1 + (n-1)d$ добиваме:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}. \qquad (2)$$

Ова е бараната формула за збир на првите *n* членови на аритметичка прогресија. Таа ги содржи величините a_1, d, n и S_n и може да послужи за пресметување на било која нивна вредност, ако се дадени останатите три.

1. Пресметај го збирот на првите *n* непарни природни броеви.

Во формулата (2) заменуваме $a_1 = 1$ и $d = 2$ па добиваме:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(2 + 2(n-1)) = \frac{n}{2}(2n) = n^2. ♦$$

2. Една фабрика за чевли во првата година од основањето произвела 50000 пара чевли, а секоја наредна година производството го зголемувала за 3000 пара чевли. Колку вкупно пара чевли произвела фабриката за првите осум години од своето постоење?

Заменувајќи во формулата (2) $n = 8$, $a_1 = 50000$ и $d = 3000$ добиваме:

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 50000 + 7 \cdot 3000] = 4 \cdot 121000 = 484000\,.$$

Значи, за првите 8 години се произведени 484000 пара чевли. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја аритметичката средина на броевите: а) 15 и 23, б) $x+y$ и $x-y$.

2. Нека е дадена произволна аритметичка прогресија. Покажи дека постои член чија вредност е еднаква на $\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2}$.

3. Избери произволна аритметичка прогресија и провери дека важи:

$$a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}, \; (k < m),$$

односно a_m е аритметичка средина од a_{m-k} и a_{m+k}. Потоа обиди се да го покажеш ова својство во општ случај.

4. Пресметај го збирот на првите n парни броеви.

5. Колкав е збирот на првите 78 членови на една аритметичка прогресија ако:
а) $a_1 = 5$ и $d = 3$, б) $a_1 = -2$ и $d = 2$?

6. Збирот на првите n природни броеви е еднаков на 1275. Колку е n?

7*. Што можеш да заклучиш за една аритметичка прогресија ако важи:
$a_7 + a_{11} = a_5 + a_{20}$?

6. 5. Геометриска прогресија

Додека за аритметичките низи важи дека разликата на два последователни члена е секогаш ист број, во оваа наставна единица ќе разгледуваме низи за коишто количникот на два последователни членови е еден ист број. Тоа се геометриските прогресии. Овие низи имаат примена при определување на каматите на штедни влогови.

Дефиниција 1. Низата (a_n) од облик

$$a\,,\ aq\,,\ aq^2\,,\ aq^3\,,\ aq^4\,,... \qquad (1)$$

каде $q \neq 0$, се нарекува **геометриска прогресија**.

Забележуваме дека секој нареден член се добива од претходниот со множење со бројот $q \neq 0$. Елементот a е прв член на низата, а q се нарекува количник бидејќи

$$q = \frac{aq}{a} = \frac{aq^2}{aq} = \frac{aq^3}{aq^2} = ...$$

1. Низата $3, 6, 12, 24, 48, 96, ...$ е геометриска прогресија со прв член 3 и количник еднаков на 2 ($= \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = ...$) .♦

2. Да се формира геометриската прогресија со прв член 2 и коефициент -3. Бараната низа е 2, $2 \cdot (-3)$, $2 \cdot (-3)^2$, $2 \cdot (-3)^3$,..., односно $2, -6, 18, -54, ...$ ♦

3. Низата со прв член 18 и количник $\frac{1}{3}$ е 8, $\frac{18}{3} = 6$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$,...♦

Ако $q > 1$, тогаш геометриската прогресија е растечка низа ако $a_1 > 0$, а опаѓачка ако е $a_1 < 0$.

4. Геометриската прогресија $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...$ со $a_1 = 1 > 0$ и $q = 2 > 1$, е растечка. ♦

5. Геометриската прогресија $-1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, ...$ со $a_1 = -1 < 0$ и $q = 2 > 1$ е опаѓачка. ♦

Ако $q = 1$, тогаш низата е константна, на пример $-5, -5, -5, -5, -5, ...$

Ако $0 < q < 1$, тогаш геометриската прогресија е опаѓачка низа ако $a_1 > 0$, а растечка ако е $a_1 < 0$.

6. Геометриската прогресија $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, ...$ со $a_1 = 1 > 0$ и $q = \frac{1}{2} < 1$ е опаѓачка. ♦

7. Геометриската прогресија $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, ...$ со $a_1 = -1 < 0$ и $q = \frac{1}{2} < 1$ е растечка. ♦

Ако $q<0$, тогаш знаците на членовите наизменично се менуваат, па таа не е ниту растечка ниту опаѓачка. Тоа може да се види од пример 2.

Од формулата (1) може да се види дека:

$$a_2 = a_1 q\,,$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2\,,$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3\,,$$

$$a_5 = a_4 q = a_1 q^4\,,$$

$$\ldots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad (2)$$

Формулата (2) ни дава можност да се најде било кој член на низата ако е даден првиот член и количникот.

8. Шестиот член на геометриската прогресија определена со $a_1=-162$ и $q=-\frac{1}{3}$ според формулата (2) е:

$$a_6=(-162)\cdot(-\frac{1}{3})^5=\frac{2\cdot 3^4}{3^5}=\frac{2}{3}\,.\blacklozenge$$

9. Четвртиот член на една геометриска прогресија е 162, а шестиот член е 1458. Најди ги првиот член и количникот.

Од формулата (2) за $n=4$ и за $n=6$ добиваме:

$162=a_1\cdot q^3$ и $1458=a_1\cdot q^5$.

Со делење на втората равенка со првата добивме $9=q^2$, од каде е $q=\pm 3$. За $q=3$ од првата равенка добиваме $a_1=\frac{162}{3^3}=6$, а ако а $q=-3$ од првата равенка добиваме $a_1=\frac{162}{(-3)^3}=-6$. ◆

Задачи за самостојна работа

1. Првите два члена на една геометриска прогресија се 48 и 24. Најди го петтиот член на прогресијата.

2. Кои од следните низи се геометриски прогресии:

а) $2,-8,32,-128,512,\ldots,2\cdot(-4)^{n-1},\ldots$ б) $1,8,27,81,\ldots,n^3,\ldots$

в) $9,4,-1,-6,-11,\ldots,14-5n,\ldots$ г) $1,2,4,8,16,\ldots,2^{n-1},\ldots$?

За оние низи кои се геометриски прогресии најди го почетниот член и количникот.

3. а) Најди го петтиот член на една геометриска прогресија со почетен член 2 и количник 1,5.

б) Најди го седмиот член на една геометриска прогресија со почетен член 1,5 и количник -2.

4. Драган вложил штеден влог во банка при што годишната камата е 6%.

а) Колку проценти ќе се зголеми неговиот влог после 7 години?

б) После колку години влогот ќе биде барем двапати поголем од почетниот влог?

5. Александар и Бошко вложиле иста сума на пари во банка. Александар ги вложил со 3% камата и ги чувал парите 4 години, а Бошко го вложил со 4% камата и ги чувал 3 години. Кој од нив двајцата добил поголема сума на пари од банката?

6. Бројот на бактериите во млекото се удвојува на секои 3 часа. Колу пати ќе се зголеми бројот на бактериите после 24 часа?

6. 6. Својства на геометриската прогресија

А. 1. Да ја разгледаме конечната геометриска прогресија $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128$. Забележуваме дека $\frac{1}{2} \cdot 128 = 2 \cdot 32 = 8 \cdot 8 = 32 \cdot 2 = 128 \cdot \frac{1}{2}$. ♦

Ќе покажеме дека ова својство важи и во општ случај. Нека е дадена конечна геометриска прогресија $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ Користејќи дека $a_2 = a_1 q$ и $a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$ добиваме

$$a_2 a_{n-1} = a_1 q \cdot \frac{a_n}{q} = a_1 a_n .$$

Понатаму, користејќи дека $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$ и $a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{q} = \frac{a_n}{q^2}$ се добива:

$$a_3 a_{n-2} = a_1 q^2 \cdot \frac{a_n}{q^2} = a_1 a_n .$$

Продолжувајќи ја оваа постапка понатаму добиваме $a_k = a_1 q^{k-1}$ и $a_{n-(k-1)} = \frac{a_n}{q^{k-1}}$, а оттука:

$$a_k a_{n-(k-1)} = a_1 q^{k-1} \cdot \frac{a_n}{q^{k-1}} = a_1 a_n . \qquad (1)$$

За паровите членови $(a_2;a_{n-1})$, $(a_3;a_{n-2})$, $(a_4;a_{n-3})$, ..., $(a_k;a_{n-k+1})$, ..., $(a_{n-1};a_2)$ за кои збирот на индексите е еднаков на $n+1$, велиме дека се **еднакво оддалечени од крајните членови** a_1 и a_n. Според тоа, равенството (1) го искажува следното својство:

1^0. Производот на секои два члена на геометриската прогресија кои се еднакво оддалечени од крајните членови a_1 и a_n е еднаков на производот на крајните членови.

2. Да ја разгледаме геометриската прогресија $2,6,18,54,162,486,...$ За $n=5$ претходното својство покажува дека:

$2\cdot162 = 6\cdot54 = 18\cdot18 = 54\cdot6 = 162\cdot2 \quad (= 324)$,

додека за $n=6$ претходното својство покажува дека:

$2\cdot486 = 6\cdot162 = 18\cdot54 = 54\cdot18 = 162\cdot6 = 486\cdot2 \quad (= 972)$. ♦

3. Да ја разгледаме низата од пример 2. Забележуваме дека вториот член (6) е геометриска средина од првиот (2) и третиот (18), третиот член (18) е геометриска средина од вториот (6) и четвртиот (54), четвртиот член (54) е геометриска средина од третиот (18) и петтиот (162), итн. ♦

Во општ случај, од $a_m = \frac{a_{m+1}}{q}$ и $a_m = a_{m-1}q$, добиваме:

$(a_m)^2 = a_{m-1}a_{m+1}$, т.е. $a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}$.

Според тоа, важи следното својство.

2^0. Во произволна геометриска прогресија, за $1<m$ важи $a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}$, односно a_m е геометриска средина од a_{m-1} и a_{m+1}.

На ист начин се докажува дека важи следното својство, кое го обопштува својството 2^o.

3^0. Во произволна геометриска прогресија, за $k<m$ важи $a_m = \sqrt{a_{m-k}a_{m+k}}$, односно a_m е геометриска средина од a_{m-k} и a_{m+k}.

4. Меѓу броевите 3 и 192 да се интерполираат пет броја кои со дадените броеви образуваат геометриска средина.

Најпрво го определуваме количникот q така што $a_1=3$ и $a_7=a_1q^6=192$. Заменувајќи $a_1=3$ добиваме $3\cdot q^6=192$, од каде $q^6=64$, $q=\pm2$. Ако $q=2$ се добива конечната прогресија $3,6,12,24,48,96,192,$ ако $q=-2$ се добива конечната прогресија $3,-6,12,-24,-48,-96,192.$ ♦

Б. Да го означиме со S_n збирот на првите n членови на дадена геометриска прогресија, односно

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}. \qquad (1)$$

Ако оваа вредност се помножи со q се добива:

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \qquad (2)$$

Со одземање на ревенството (1) од равенството (2) се добива:

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1,$$

од каде е:

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1),$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}. \qquad (3)$$

Ова е бараната формула за збир на првите n членови на геометриска прогресија. Таа ги содржи величините a_1, q, n и S_n и може да послужи за пресметување на било која нивна вредност, ако се дадени останатите три. Формулата (3) обично се користи кога $q>1$, а ако $q<1$ обично се користи истата формула но во следниов запис:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad (4)$$

Ако $q=1$, тогаш овие формули не можат да се користат бидејќи се добива израз во кој се јавува 0 и во именителот и во броителот. Но, во тој случај, очигледно е дека $S_n = na_1$.

1. Најди го збирот на првите 6 членови на геометриската прогресија со прв член $a_1 = 3$ и $q = 2$.

Заменувајќи n=6, $a_1 = 3$ и $q = 2$ добиваме:

$$S_6 = \frac{3(2^6-1)}{2-1} = 3\cdot(64-1) = 3\cdot 63 = 189. \ ♦$$

2. Најди го збирот на првите 7 членови на геометриската прогресија со прв член $a_1 = 4$ и $q = -3$.

Заменувајќи n=6, $a_1 = 4$ и $q = -3$ добиваме:

$$S_7 = \frac{4((-3)^7-1)}{-3-1} = \frac{4(-2187-1)}{-4} = 2187+1 = 2188. \ ♦$$

3. Најди го збирот на првите $2k$ членови на една геометриска прогресија со количник $q=-1$.

Заменувајќи n=$2k$ и $q=-1$ добиваме:

$$S_{2k}=\frac{a_1((-1)^{2k}-1)}{-1-1}=\frac{a_1(1-1)}{-2}=0.$$

Да забележиме дека овој резултат и природно е да се очекува, бидејќи низата е зададена со $a_1,-a_1,a_1,-a_1,...$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го збирот на првите 8 членови на една геометриска прогресија која започнува со членовите:

а) $-1,3,-9,...$ б) 5, 5, 5,..., в) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},...,$ г) 512, –256, 128,...

2. Најди го првиот член на геометрискатa прогресија за која:

а) $n=8$, $q=2$, $S_6=765$, б) $n=4$, $q=\frac{2}{3}$, $S_6=65$.

3. Петтиот член на една геометриска прогресија е $\frac{1}{9}$, а количникот е $-\frac{1}{3}$. Да се определи првиот член и збирот на сите пет членови. Напиши ја геометриската прогресија.

4. Платата за месец јануари на Петар му била 20000 денари. До крајот на годината секој месец платата му се зголемувала за 3%. Колку пари ќе добие Петар во текот на целата година?

5. Најди ја геометриската средина на броевите: а) 30 и 120, б) xy и $\frac{x}{y}$.

6. Избери произволна конечна геометриска прогресија и провери ги својствата 1, 2 и 3.

7***.** Нека е дадена произволна геометриска прогресија. Покажи дека постои член чија вредност е еднаква на $\sqrt{a_1a_{2n+1}}$.

6. 7. Задачи за вежбање

1. Напиши низа која што ниту е растечка ниту опаѓачка.

2. Дали постои индекс n за кој соодветниот член на низата $1,4,16,25,36,...,n^2,...$ прима вредност 125?

3. Низата (a_n) е таква што нејзините непарни членови се позитивни, а нејзините парни членови се негативни. Можно ли е таа низа да биде растечка или опаѓачка?

4. Пресметај го збирот на првите 1000 природни броеви.

5. Пресметај го збирот на првите 100 членови на една аритметичка прогресија, ако првиот член е 7, а стотиот член е 53.

6. Пресметај го збирот на првите 46 членови на една аритметичка прогресија, ако се знае дека $a_2 = 6$ и $a_{45} = 74$.

7. Помеѓу броевите 1 и 14 интерполирај три броја a, b, c така што низата 2, a, b, c, 14 да биде аритметичка прогресија.

8. Покажи дека за произволна аритметичка прогресија важи:
$a_n = a_k + (n-k)d$.

9. Еден трговец продавал шаховска табла на следниот начин: за првото поле на шаховската табла барал 1 денар, за второто поле барал 2 денари, за третото поле 3 денари итн. За колку денари трговецот ја продавал шаховската табла?

10. Најди го збирот на првите $2k+1$ членови на една геометриска прогресија со прв член 100 и количник $q = -1$.

11. Најди број b, така што 3, b, 75 да формира геометриска прогресија.

12. Покажи дека за произволна геометриска прогресија важи $a_n = a_k q^{n-k}$.

13. Ако секоја бактерија на една култура се разделува секој час на две бактерии, колку бактерии ќе бидат присутни после 8 часа ако на почетокот биле само 7 бактерии?

14. Едно дете почнало да штеди пари во својата каса од месец јануари ставајќи во касата 5 денари. Секој нареден месец детето ставало двојно повеќе пари во касата отколку во претходниот месец. Калку пари имало детето во касата на крајот од годината?

15*. а) Ако низата a_1, a_2, a_3 е истовремено и аритметичка и геометриска прогресија, докажи дека $a_1 = a_2 = a_3$.

б) Ако низата $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ е истовремено и аритметичка и геометриска прогресија, докажи дека $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.

16*. Што можеш да заклучиш за една геометриска прогресија ако важи:
$a_2 a_3 = a_1 a_7$?

Тематски преглед

Низа е пресликување од множеството ℕ во множеството ℝ. Една низа е

- **растечка**, ако за секој природен број *k* важи $a_{k+1} > a_k$;
- **опаѓачка**, ако за секој природен број *k* важи $a_{k+1} < a_k$;
- **нерастечка**, ако за секој природен број *k* важи $a_{k+1} \leq a_k$;
- **неопаѓачка**, ако за секој природен број *k* важи $a_{k+1} \geq a_k$;
- **ограничена од горе**, ако постои реален број *M*, така што за секој природен број *n* важи $a_n \leq M$;
- **ограничена од долу**, ако постои реален број *M*, така што за секој природен број *n* важи $a_n \geq M$,
- **ограничена**, ако е ограничена истовремено од горе и од долу.

Секоја опаѓачка и секоја нерастечка низа е ограничена од горе, а секоја растечка и секоја неопаѓачка низа е ограничена од долу.

Една низа (a_n) се нарекува **аритметичка**, ако разликата $a_{n+1} - a_n$ помеѓу два последователни членови на низата е број кој не зависи од *n*. Овој број се означува со *d* и се нарекува **разлика**. Значи за секој природен број *n* важи $a_{n+1} - a_n = d$.

Општиот член на една аритметичка прогресија е еднаков на

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}.$$

Во произволна аритметичка прогресија, збирот на кои било два члена кои се еднакво оддалечени од крајните членови a_1 и a_n е еднаков на $a_1 + a_n$;

Во произволна аритметичка прогресија, за $k < m$ важи

$$\boxed{a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}}.$$

Збирот на првите n собирци на една аритметичка прогресија е еднаков на

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

односно

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}.$$

Низата (a_n) од облик a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, ... каде што $q \neq 0$, се нарекува **геометриска прогресија**. Опшиот член на оваа низа е

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}.$$

Производот на секои два члена на геометриската прогресија кои се еднакво оддалечени од крајните членови a_1 и a_n, е еднаков на $a_1 a_n$;

Во произволна геометриска прогресија, за $k < m$ важи

$$\boxed{a_m = \sqrt{a_{m-k} a_{m+k}}}.$$

Збирот на првите n членови на една геометриска прогресија е

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}.$$

7. СЛОЖЕНА КАМАТНА СМЕТКА

7. 1. Поим за сложена каматна сметка и начини на пресметување

Пресметаната камата на некоја сума може да биде проста и сложена. **Простата камата** или простиот интерес се пресметува на истата непроменета сума на секој период на пресметување на каматата.

Кај сложеното вкаматување, од период на период, сумата која се вкаматува се менува, односно се зголемува за пресметаната камата од претходниот период. Имено, кога капиталот во текот на еден пресметковен период се зголемува за пресметаната камата и со тоа претставува основа за пресметување на каматата за наредниот период, зборуваме за пресметување на **сложена камата**, а самото пресметување се нарекува **сложена каматна сметка** или пресметување **интерес на интерес**.

Пресметувањето на простата камата е директно зададено со формулата $i=\frac{Kpt}{100}$, каде времето t е зададено во години. Доколку времето е зададено во месеци, се користи формулата $i=\frac{Kpm}{1200}$, при што вкаматувањето се врши за m месеци, а формулата $i=\frac{Kpd}{36500}$ се користи кога времето е зададено во $d-$денови.

1. Колкава камата ќе биде исплатена за основен капитал од 240000 денари за 2 месеци, со проста каматна стапка од 6%?

Од зададените услови во задачата имаме $K=240000$, $t=2$ месеци, $p=6\%$. Тогаш,

$$i=\frac{Kpt}{1200}=\frac{240000\cdot 6\cdot 2}{1200}=2400 \text{ денари. } \blacklozenge$$

За споредба прво, со пример ќе ја покажеме разликата меѓу простата и сложената каматната стапка, а потоа ќе ги изведеме формулите за пресметување на сложената камата.

2. Колкава камата ќе донесе капитал од 34500 денари, вложени во банка за време од 4 години, со каматна стапка 8%, со проста и сложена каматна сметка?

За време од една година, за капиталот од 34500 денари, пресметаната проста камата изнесува

$$\frac{8}{100}\cdot 34500=2760 \text{ денари.}$$

Бидејќи каматата се пресметува на основниот капитал, износот за секоја наредна година повторно е 2760 денари, па оттука, за време од 4 години пресметаната камата е четири пати поголема од онаа пресметана за една година. Тогаш вкупната камата е:

$$i = \frac{8}{100} \cdot 34500 \cdot 4 = 11040 \text{ денари.}$$

Сложената каматна сметка, за секоја наредна пресметка на камата, ја вклучува веќе пресметаната камата кон основната сума, па оттука, каматата за првата година, изнесува исто $i_1 = \frac{8}{100} \cdot 34500 = 2760$ денари, но веќе за втората година, основната сума е збир на првата основна сума и првата камата $34500 + 2760 = 37260$ денари.

Втората пресметана камата е $i_2 = \frac{8}{100} \cdot 37260 = 2980{,}8$ денари.

За пресметување на третата камата, за третата година, основната сума повторно се менува, сега е збир од првата основна сума и двете пресметани камати, односно $37260 + 2980{,}8 = 40240{,}8$ денари. Тогаш $i_3 = \frac{8}{100} \cdot 40240{,}8 = 3219{,}264$ денари.

Конечно, последната сума на која се пресметува камата е $40240{,}8 + 3219{,}264 = 43460{,}064$ денари и изнесува $i_4 = \frac{8}{100} \cdot 43460{,}064 = 3476{,}8$ денари.

Вкупната камата, пресметана за четирите години е 12436,86 денари, вредност поголема од онаа пресметана со простата каматна сметка. ♦

Сложената камата може да се пресметува еднаш, два пати или повеќе пати во текот на годината. Периодот на кој се пресметува каматата се нарекува **период на капитализација** или **период на вкаматување**. Доколку пресметувањето на каматата се врши еднаш годишно и на крајот на секоја година се додава на сумата, се вели дека вкаматувањето, односно капитализирањето е годишно. Тогаш периодот на капитализирање е една година. Доколку пресметувањето на каматата се врши два пати годишно, тогаш периодот на вкаматување е шест месеци или еден семестар, а вкаматувањето е полугодишно или семестрално. Слично, ако пресметувањето на каматата се врши четири пати годишно, го нарекуваме квартално или тримесечно, а периодот на вкаматување е три месеци.

Четирите основни величини кои се јавуваат при проста каматна стапка се:

- почетна сума (основен капитал, главница) K
- пресметана камата i
- каматна стапка (во проценти) p, инаку еднаква на камата за 100 денари за единица време
- времето за кое се пресметува каматата t, изразено во години или мерки помали или поголеми од година.

Истите овие величини се дел и од сложената каматна сметка, но згора на овие, како прв елемент на сложената каматна сметка, се јавува и

- бројот на вкаматувања во текот на една година m , односно бројот на периоди на вкаматување во годината.

Вкаматувањето, во практика, се означува со соодветни ознаки кои укажуваат на периодот на вкаматување. Така, годишното вкаматување се бележи со (a), полугодишното (семестралното) со (s), тримесечно (квартално) со (q), месечно со (m), при што каматната стапка најчесто се утврдува на годишно ниво.

Доколку каматната стапка е зададена како годишна каматна стапка, истата се означува со $p.a.$, ако е зададена како полугодишна, тогаш носи додавка $p.s.$. Може да е зададена на ниво на тримесечје, па ја бележиме со $p.q.$ или како месечна камата, па носи додавка $p.m.$ Вака зададената каматна стапка, се нарекува **номинална каматна стапка.** Номиналната каматна стапка е еднаква на зголемувањето на сто парични единици дадени на заем во каматен период кој се смета за основен.

Се случува, периодот на кој е зададена каматната стапка да е различен од периодот на кој се врши вкаматувањето. Во тој случај, потребно е да се изврши изедначување, односно сведување на каматната стапка на периодот на вкаматување. Така добиената каматна стапка се нарекува **релативна каматна стапка.** Се добива како дел од номиналната. Така, ако номиналната годишна стапка е зададена на ниво на година, а периодот на вкаматување е шест месеци, имајќи предвид дека шест месеци се половина од една година и релативната каматна стапка е една половина од номиналната. Доколку номиналната камата е годишна, а вкаматувањето месечно, релативната стапка е една дванаесеттина од годишната. Слично, за номинална стапка која е семестрална, за тримесечно вкаматување, релативната стапка е една половина од зададената, затоа што трите месеци се половина од шесте месеци. Ако номиналната е тримесечна, а вкаматувањето годишно, релативната стапка која одговара на една година е четири пати поголема од зададената, имено годината е четири пати подолга од тримесечјето. За споредба ќе илустрираме со една табела на вредности, за за $m=2, m=1, m=4, m=12$ и слично.

Вкаматување	Номинална стапка	Релативна стапка
Семестрално	$8\% p.a.$	$4\% p.s.$
Годишно	$8\% p.s$	$16\% p.a.$
Тримесечно	$8\% p.a$	$2\% p.q.$
Месечно	$8\% p.a.$	$0{,}667\% p.a.$
Двегодишно	$8\% p.s$	32%
Двомесечно	$8\% p.a.$	1,333%

Ако вкаматувањето се врши на крајот на секој пресметковен период, станува збор за **декурзивно пресметување на камата**, односно **декурзивно вкаматување**, а каматната стапка се бележи со $p.a.(d)$. Притоа, основата за пресметување на декурзивната камата е капиталот на почетокот од периодот на вкаматување.

Доколку капитализирањето се врши на почетокот на секој период, основата за пресметување на антиципативната камата е капиталот на крајот од периодот на вкаматување, а велиме се работи за **антиципативно вкаматување**. Каматната стапка се бележи со $p.a.(a)$.

Притоа, ако за две каматни стапки, едната дадена декурзивно, а другата антиципативно, сакаме да одлучиме која е поповолна, потребно е да ги изразиме и двете на ист начин. Притоа, важно е, на иста сума за една година да се пресметува иста камата, односно да се добие ист износ K_1. Нека е позната основната сума која ќе се вкаматува K и каматните стапки $\pi\% p.a.(a)$ и $p\% p.a.(d)$. Според дефинициите за видот на вкаматувањето, за декурзивното вкаматување, пресметаната камата се додава на основната сума, па на крајот на годината, добиваме сума $K_1 = K\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\frac{100+p}{100}$. При антиципативното вкаматување, должникот превзема обврска однапред да исплаќа камата по каматна стапка π за капиталот K. Тоа значи дека на почетокот на првиот период, должникот не подигнува износ K, туку износ $K = K_1 - K_1\frac{\pi}{100} = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right)$, бидејќи пресметаната камата се одзема од крајната вредност. Тогаш почетната вредност на сумата е $K = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right) = K_1\frac{100-\pi}{100}$. Оттука, $K_1 = K\frac{100}{100-\pi}$. Изедначувајќи ги крајните вредности K_1, добиваме $K\frac{100+p}{100} = K\frac{100}{100-\pi}$, односно $\frac{100+p}{100} = \frac{100}{100-\pi}$. Конечно, ако ни е позната каматната стапка $\pi\% p.a.(a)$, тогаш соодветната декурзивна каматна стапка можеме да ја пресметаме според формулата $p = \frac{100\pi}{100-\pi}$, а ако е позната каматната стапка $p\% p.a.(d)$, соодветната антиципативна каматна стапка се пресметува според формулата $\pi = \frac{100p}{100+p}$.

3. Банка дава заем со каматна стапка $6\% p.a.(d)$, а нејзина конкурентна банка со каматна стапка $5{,}7\% p.a.(a)$. Која банка нуди поповолна камата?

Ќе ги споредиме двете каматни стапки, но прво мора да извршиме претворање на декурзивната во антиципативна или обратно.

Ако декурзивната каматна стапка се претвори во антиципативна стапка, добиваме $\pi = \frac{100p}{100+p} = \frac{100 \cdot 6}{100+6} = 5{,}66\% p.a.(a)$. Нормално, поповолна е банката која пресметува каматна стапка $5{,}7\% p.a.(a)$.

За да се увериме, ќе ја извршиме и обратната трансформација, ќе ја трансформираме антиципативната каматна стапка во декурзивна стапка и тоа $p = \frac{100\pi}{100-\pi} = \frac{100 \cdot 5{,}7}{100-5{,}7} = 6{,}04\% p.a.(d)$. Се разбира, се потврди дека поповолна е каматната стапка од $5{,}7\% p.a.(a)$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Колкав износ камата се добива од сума 25000 денари, при просто вкаматување каматна стапка од 15% за време од:

а) 5 години б) 3 месеци в) 25 дена по $(30,360)$ и $(k,365)$.

2. Колку години треба да биде вложена основна сума K, за да со годишна проста каматна стапка од 5%, пресметаната камата изнесува колку и вложената сума? (Забелешка. $K = I$)

3. Пресметај ја каматната стапка со која за долг од 34500 денари, пресметана е проста камата од 6900 денари, за 4 години?

4. За која вложена сума се пресметува проста камата од 3540 денари, при каматна стапка од 6% за:

а) 4 години б) 8 месеци.

5*. Во банка се вложени две различни основни суми кои се разликуваат за 12000 денари. Поголемата сума е вложена на една година, со 4% каматна стапка, а помалата сума на 10 месеци, со 6% каматна стапка. Пресметај ја вкупната вложена сума, доколку пресметаните прости камати, за двете суми поединечно се еднакви.

6. За дадена номинална годишна каматна стапка $12\% p.a.$, определи ги:

а) полугодишната релативна каматна стапка;
б) тримесечна релативна каматна стапка;
в) месечна релативна каматна стапка.

7. За дадена номинална тримесечна каматна стапка $2\% p.q.$, определи ги:

а) полугодишната релативна каматна стапка;

б) годишната релативна каматна стапка;
в) месечна релативна каматна стапка.

8. Декурзивната каматна стапка од 10%, претвори ја во антиципативна.

9. Антиципативната каматна стапка од 10%, претвори ја во декурзивна.

10*. Која каматна стапка е поповолна, $6\% p.a.(a)$ или $6{,}5\% p.a.(d)$.

7. 2. Пресметување на идната вредност на сумата

При пресметувањето на сложената камата, покрај износот на каматата, потребно е да се знае и износот на почетната сума зголемена за пресметаната камата, на крајот на времето на вкаматување, односно вкаматената сума или износот на i/i. Притоа, крајната вредност на сумата, зголемена за износот на сложената камата, на крајот на целиот период на вкаматување, ја нарекуваме **идна вредност на сумата**. Почетната вредност на сумата која се вкаматува, K, се нарекува **сегашна вредност на сумата.**

За почеток ќе разгледаме сума K која се вкаматува декурзивно. Нека $K_1, K_2, ..., K_n$ се ознаки за вредностите на капиталот на крајот на првата, втората и натаму соодветно, $n-$тата година на вкаматување. Ќе покажеме дека истите формираат геометриска низа. Ќе разгледаме како се менува вредноста на капиталот по n изминати години, за кои се врши годишно вкаматување на крајот на секоја година $(m=1)$, со годишна декурзивна каматна стапка $p\% p.a.(d)$. Да се потсетиме, дека секоја пресметана камата се додава на главницата и влегува во основата за пресметување на следната камата. За вредноста на капиталот по периоди, добиваме:

$$K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1+\frac{p}{100}\right), \qquad \text{на крајот на првата година,}$$

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^2, \qquad \text{на крајот на втората година}$$

и продолжувајќи на истиот начин за наредните години, до последната,

$$K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1} p}{100} = K_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n, \qquad \text{на крајот на } n-\text{тата година.}$$

Доколку разгледаме две издвоени, последователни вредности на сумата, K_{s-1} и K_s, според претходно добиеното, вредноста на сумата на крајот на $s-$тата година ја добиваме како збир на претходната вредност K_{s-1} и каматата пресметана за сумата K_{s-1}, односно:

$$K_s = K_{s-1} + K_{s-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{s-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Тогаш количникот меѓу било кои две последователни суми, односно суми на крајот на два последователни периоди, е:

$$\frac{K_s}{K_{s-1}} = 1 + \frac{p}{100}.$$

Очигледно, $K, K_1, K_2, ..., K_n$ образуваат геометриска низа со количник $1 + \frac{p}{100}$ и прв член на низата K. Притоа, за крајната вредност на капиталот, при горе наведените услови, се добива:

$$\boxed{K_n = K(1 + \frac{p}{100})^n}.$$

Оваа формула ќе ја прошириме со параметри кои го означуваат бројот на периоди на вкаматувања во една година m, каматната стапка на еден период, односно релативната каматна стапка $\frac{p}{m}$, каде p е годишната декурзивна каматна стапка, како и вкупниот број на периоди на вкаматување nm. Вкупниот број на периоди на вкаматување е производот на бројот на години за кои се пресметува каматата, помножен со бројот на вкаматувања годишно (начинот на вкаматување).

При овие услови, значи при m периоди на вкаматувања во една година, идната вредност на сумата е:

$$\boxed{K_n = K(1 + \frac{p}{100m})^{nm}}.$$

Факторот $r = 1 + \frac{p}{100m}$, се нарекува декурзивен каматен фактор. Ако се вклучи каматниот фактор во формулата за идната вредност на сумата, се добива

$$\boxed{K_n = Kr^{nm}}.$$

Забелешка 1. За поедноставно пресметување на идната вредност на сумата, постојат специјално изработени таблици за интерес на интерес, кои понатаму ќе ги означуваме со i/i таблици. Во нив, најчесто употребуваните величини, за конкретна вредност на каматна стапка се веќе пресметани и од таму можат да се преземаат како готови. Така, првите i/i таблици содржат вредности за каматниот фактор, односно крајна вредност на едена парична единица зголемена за декурзивен каматен фактор и во нив вредноста r^n се означува со I_p^n, па формулата за пресметување на идната вредност на сумата гласи:

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_p^n},$$

за вкаматување кое се врши еднаш годишно, во тек на n години, со каматна стапка $p\%\ p.a.(d)$.

Кога вкаматувањето се врши повеќепати годишно, формулата добива облик:

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm}},$$

при што времето на вкаматување се множи со начинот на вкаматување, а каматната стапка се дели со начинот на вкаматување. Со m е означен начинот на вкаматување, односно бројот на периоди на вкаматување годишно.

1. На која сума ќе нарасне износот од 25000 денари за 20 години со каматна стапка од $8\%\ \ p.a.(d)$, ако вкаматувањето е годишно, полугодишно и тримесечно.

Од податоците во задачата $K = 25000, n = 20, p = 8\%p.a.(d)$.

а) Вкаматувањето е годишно, односно $m = 1$. Декурзивниот каматен фактор е $r = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$.

Очекуваниот капитал би бил $K_{20} = Kr^{20} = 25000 \cdot 1{,}08^{20} = 116523{,}93$ денари.

б) Нека $m = 2$, односно пресметувањето на каматата се врши два пати во годината. Декурзивниот фактор е $r = 1 + \frac{8}{100 \cdot 2} = 1{,}04$, а капиталот станува $K_{20} = Kr^{40} = 25000 \cdot 1{,}04^{40} = 120025{,}52$ денари, што е извесно зголемување во однос на само едно вкаматување.

в) Нека $m = 4$, при што капитализирањето се врши на три месеци, односно четири пати во годината. Декурзивниот фактор е $r = 1 + \frac{8}{100 \cdot 4} = 1{,}02$, а капиталот станува $K_{20} = Kr^{80} = 25000 \cdot 1{,}02^{80} = 121885{,}98$ денари. ♦

Со зголемување на бројот на вкаматувањата кај декурзивното пресметување на сложената камата, се зголемува и крајната вредност на капиталот. Имено, колку почестото вкаматуваме, толку е почесто и додавањето на сложената камата, односно толку повеќе се зголемува вредноста на изразот r^{nm}, а со тоа и идната вредност на сумата.

Заради можноста номиналната каматна стапка да се задава и на пократок период од една година, да видиме што станува со годишната каматна стапка, која во овој случај игра улога на релативна каматна стапка. Ако $p = 8\%p.s.(d)$, релативната годишна стапка е 16%, имајќи предвид дека дадената стапка важи само за семестар односно половина година. Ако $p = 8\%p.q.(d)$ е квартална номинална стапка, релативната годишна е 32%.

2. На која сума ќе нарасне почетниот капитал од 25000 денари, за 5 години, со каматна стапка $p = 8\% p.m.(d)$, ако вкаматувањето е квартално.

Прво треба да се пресмета релативната годишна каматна стапка, која е $8 \cdot 12 = 96\%$ годишно, но со оглед дека се вкаматува квартално, за само едно тримесечје каматната стапка изнесува $\frac{96}{4} = 24\%$. Истата вредност се добива доколку размислиме колку пати еден месец се јавува во едно тримесечје, и бидејќи кварталот се состои од 3 месеци, доволно е да кажеме дека релативната каматна стапка на еден квартал е $3 \cdot 8 = 24\%$. Вкупниот број на периоди на вкаматување е $nm = 5 \cdot 4 = 20$. За идната вредност на сумата важи:

$$K_5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{12 \cdot 8}{4 \cdot 100}\right)^{5 \cdot 4} = 25000 \cdot \left(1 + \frac{24}{100}\right)^{20} = 25000 \cdot 1{,}24^{20} = 25000 \cdot 73{,}864 .$$

Значи идната вредност на сумата е $K_5 = 1846603{,}74$ денари. ♦

Следниот пример ќе покаже каква е разликата во идната вредност на вложената сума, кога користиме само сложена каматна сметка и комбиниран метод на просто и сложено вкаматување.

3. На 15.09 сме депонирале 18000 денари. Со која сума ќе располагаме на 28.07 во десеттата година (сметајќи од денот на депонирањето), ако вкаматувањето се врши квартално, на $30.09, 30.12,$ 30.03 и 30.06 во текот на секоја година, а каматната стапка е $p = 6\% p.s.(d)$, при услов времето да се пресметува по матрица $(30,360)$.

Ќе запишеме дека почетната сума е $K = 18000$, вкаматувањето е квартално, односно $m = 4$, каматната стапка е $p = 6\% p.s.(d)$, а годишната релативна каматна стапка е $12\% p.a.(d)$.

Соодветниот каматен фактор е $r = 1 + \frac{2p}{100m} = 1 + \frac{6 \cdot 2}{100 \cdot 4} = 1{,}03$.

Останува точно да пресметаме колку време тече вкаматувањето. Од денот на депонирањето 15.09 до датумот на првото вкаматување 30.09 има само 15 дена. Ако истите ги претвориме во години, по дадената матрица за времето тоа се $t' = \frac{15}{360}$ години. Понатаму, до крајот на првата година има еден цел пресметковен период до 30.12. Од почетокот на втората година до крајот на деветтата година има вкупно 8 години, односно 32 пресметковни периоди, согласно со тоа и 32 капитализирања. Во текот на десеттата година има 2 цели периоди на вкаматување до 30.06 и уште 28 дена до денот на кој би требале да се подигнат средствата. Значи има вкупно 35 цели периоди на капитализација како и $t' = 15$ дена $= \frac{15}{360}$ години, од првата година по вложувањето и $t'' = 28$ дена $= \frac{28}{360}$ години, од последната година.

Ако крајната вредност на капиталот ја пресметуваме само со користење на сложено вкаматување тогаш времето ќе го претвориме во цели периоди на капитализација и останатиот дел во години, од каде:

$$K_n = Kr^{35} \cdot r^{t'm} \cdot r^{t''m} = 18000 \cdot 1{,}03^{35} \cdot 1{,}03^{\frac{15}{360}4} \cdot 1{,}03^{\frac{28}{360}4} = 51369{,}9 \text{ денари.}$$

Ако времето го претвориме целосно во години за целите периоди имаме $\frac{35 \cdot 90}{360}$ години, имајќи предвид дека целите периоди се квартали од по 3 месеци, односно од по 90 дена. Тогаш $K_n = 18000 \cdot 1{,}03^{\frac{3193}{360}4} = 51369{,}9$ денари.

Ако користиме комбиниран метод на сложена и проста каматна стапка, каде простата каматна стапка ја употребуваме само на нецелите делови од вкупниот период на вкаматување, добиваме:

$$K_n = K(1 + \frac{p}{100}t') \cdot r^{35} \cdot (1 + \frac{p}{100}t''),$$

при тоа последователно запишувајќи го вкаматувањето, најпрво за 15 дена од првата година, па 35 цели периоди и на крај 28 дена од последната година.

Добиваме $K_n = 18000 \cdot (1 + \frac{12}{100}\frac{15}{360}) \cdot 1{,}03^{35} \cdot (1 + \frac{12}{100}\frac{28}{360}) = 51377{,}86$ денари. ♦

Доколку комбинираме сложена и проста каматна сметка, добиената идна вредност на сумата се разликува од онаа за чија пресметка е употребена сложена каматна сметка, при што сумата од комбинираниот метод е малку поголема.

Основната разлика меѓу декурзивното вкаматување и антиципативното вкаматување, како што кажавме и во воведот, се состои во времето на пресметување на каматата. Кај декурзивното вкаматување пресметувањето на каматата се врши на крајот на пресметковниот период, додека кај антиципативното пресметување на почетокот на секој пресметковен период.

При антиципативното вкаматување, должникот презема обврска однапред да исплаќа камата по каматна стапка π за капиталот K. Нека $K_1, K_2, ..., K_n$ се ознаки за вредностите на капиталот на крајот на првата, втората и натаму соодветно, $n-$тата година на вкаматување.

На почетокот на првиот период, должникот не подигнува износ K, туку износ $K = K_1 - K_1\frac{\pi}{100} = K_1\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) = K_1\frac{100-\pi}{100}$. Тогаш, на крајот на првата година, при годишно вкаматување ($m = 1$), обврската на должникот изнесува

$$K_1 = \frac{K}{1 - \frac{\pi}{100}} = K\frac{100}{100-\pi}.$$

На крајот на втората година, бидејќи пресметуваме сложена камата, основа за вкаматување е претходно вкаматената вредност, односно сега $K\frac{100}{100-\pi}$. Значи, на крај на втората година, обврските изнесуваат:

$$K_2 = K_1\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^2.$$

Продолжувајќи на истиот начин, за секоја наредна година, доаѓаме и до последната $n-$тата година на вкаматување, кога идната вредност на сумата изнесува:

$$K_n = K_{n-1}\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^n.$$

Крајните вредности на капиталот $K, K_1, K_2,...$ при антиципативното вкаматување, формираат геометриска низа со количник $\rho = \frac{100}{100-\pi}$. Ако K_n е износот на капиталот за $n-$тиот период, тогаш важи $K_n = K_{n-1}\rho$, односно вредноста на капиталот K за n години, при антиципативно годишно вкаматување станува:

$$\boxed{K_n = K\rho^n}.$$

Факторот $\rho = \frac{1}{1-\frac{\pi}{100}} = \frac{100}{100-\pi}$ се нарекува антиципативен каматен фактор.

Ако добиените формули ги прошириме со параметри кои ги означуваат бројот на периоди на вкаматувања во една година m, каматната стапка на еден период, односно релативната каматна стапка $\frac{\pi}{m}$, каде π е годишната антиципативна каматна стапка, како и вкупниот број на периоди на вкаматување nm, тогаш идната вредност на сумата е:

$$K_n = K\left(\frac{100}{100-\frac{\pi}{m}}\right)^{nm} = K\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right)^{nm}.$$

Ако се вклучи антиципативниот каматен фактор во формулата за идната вредност на сумата, добиваме:

$$\boxed{K_n = K\rho^{nm}},$$

каде $\rho = \frac{100m}{100m-\pi}$.

Забелешка 2. Во i/i таблиците, слично како кај декурзивното вкаматување, вредноста ρ^n се означува со I_{π}^{n}, па за формулата за пресметување на идната вредност на сумата се добива:

$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\pi}^{n}}$,

за вкаматување кое се врши еднаш годишно.

Соодветно, доколку вкаматувањето се врши повеќепати годишно, формулата добива облик:

$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}}$,

при што времето се множи, а каматната стапка се дели со начинот на вкаматување.

Крајните формулите кои ги добиваме имаат ист облик како при декурзивното вкаматување, но заради различните каматни фактори, крајните износи се различни.

4. На која сума ќе нарасне износот од 25000 денари за 20 години со номинална каматна стапка од $8\%\ \ p.a.(a)$, ако вкаматувањето е годишно, полугодишно и тримесечно.

Од податоците во задачата имаме $K = 25000, n = 20, p = 8\% p.a.(a)$.

а) Нека бројот на вкаматувања годишно е $m = 1$. За почеток го пресметуваме антиципативниот каматен фактор $\rho = \dfrac{100}{100-8} = 1{,}08696$.

Вкаматениот износ е $K_{20} = K\rho^{20} = 25000 \cdot 1{,}08696^{20} = 132498{,}59$ денари.

б) Нека $m = 2$, односно пресметувањето на каматата се врши два пати во годината. Антиципативниот фактор е $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{200}{192} = 1{,}04166667$, а капиталот станува $K_{20} = K\rho^{40} = 25000 \cdot 1{,}04166667^{40} = 127964{,}85$ денари, што е извесно намалување во однос на само едно вкаматување.

в) Нека $m = 4$, при што капитализирањето се врши на три месеци. Антиципативниот фактор е $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{400}{392} = 1{,}020408$, а капиталот станува:

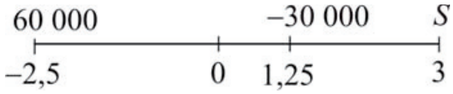
$K_{20} = K\rho^{80} = 25000 \cdot 1{,}020408^{80} = 125848{,}6$ денари. ♦

Со зголемување на бројот на вкаматувањата, кај антиципативното пресметување на сложената камата, се намалува крајната вредност на капиталот.

Ако ги споредиме идните вредности на сумите кои се добиваат при декурзивното и антиципативното вкаматување, при исти услови, само различен начин на пресметување на каматата, антиципативното вкаматување дава поголема вредност од декурзивното. При позајмен кредит, за доверителите посоодветно е антиципативното вкаматување, а за должниците декурзивното.

5. Пред 2 години и 6 месеци сме вложиле 60000 денари, а по година и 3 месеци треба да подигнеме 45000 денари. Со која сума ќе располагаме 3 години од денес, ако каматната стапка е $6\% p.a.(d)$, а вкаматувањето е тримесечно? Колку изнесува сумата при истите услови, но со антиципативно вкаматување?

За секоја од поединечните суми ќе ја пресметаме идната вредност и тоа, за вложената сума вкаматуваме вкупно $5{,}5$ години, а за повлечената сума вкаматуваме за периодот од година и 3 месеци до 3 години од денес, а тоа се вкупно 1 година и 9 месеци, односно 21 месец (црт. 1).



Црт. 1

Така, користејќи декурзивен фактор $r = 1 + \dfrac{6}{4 \cdot 100} = 1{,}015$, за сумата со која ќе располагаме после 3 години, имаме:

$$S = 60000 \cdot r^{5{,}5 \cdot 4} - 45000 \cdot r^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015^{22} - 45000 \cdot 1{,}015^{7} = 33310{,}8 \text{ денари.}$$

Во однос на антиципативното вкаматување, каматниот фактор е $\rho = \dfrac{100}{100 - \frac{6}{4}} = \dfrac{400}{400 - 6} = 1{,}015228$. Тогаш идната вредност на сумата би била:

$$S = 60000 \cdot \rho^{5{,}5 \cdot 4} - 45000 \cdot \rho^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015228^{22} - 45000 \cdot 1{,}015228^{7}, \text{ односно}$$

$S = 33644{,}62$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пред 18 години, 8 месеци и 20 дена, сме вложиле 20000 денари со каматна стапка $8\%\, p.a.(d)$ со:

а) годишно; б) тримесечно вкаматување.

Со која сума располагаме денес? Пресметките изврши ги само со сложена, а потоа и со комбиниран метод на проста и сложена каматна сметка.

2. На која сума ќе нарасне износ од 9000 денари, ако првите пет години се вложува со $6\%\, p.a.(d)$ и полугодишно вкаматување, потоа четири години со $8\%\, p.q.(d)$ месечно вкаматување и последните две години, со стапка $7\%\, p.s.(d)$ и тримесечно вкаматување?

3*. На која сума ќе нарасне износ од 9000 денари, ако првите пет години се вложува со $6\%\, p.a.(a)$ и полугодишно вкаматување, потоа четири години со $8\%\, p.q.(a)$ месечно вкаматување и последните две години, со стапка $7\%\, p.s.(a)$ и тримесечно вкаматување?

4. Пред 2 години и 3 месеци вложени се 40000 денари, а денес се вложуваат уште 24000 денари. Колкава е идната вредност на вложените средства на крајот на четвртата година од денес, ако каматната стапка е $5\% \, p.a.(d)$ со полугодишно вкаматување?

5*. Денес вложуваме 30000 денари, по три години треба да подигнеме 12000 денари, а по пет години, ќе вложиме уште 20000 денари. Со која сума ќе располагаме осум години од сега, ако каматната стапка е $6\% \, p.a.(d)$, со тримесечно вкаматување? Спореди ја добиената сума со сумата што се добива кога се користи $6\% \, p.a.(a)$ со истото вкаматување.

6*. Пред четири години, во банка се вложени 30000 денари, денес вложуваме 9000 денари, а по две години треба да подигнеме 36000 денари. За вложувањата се пресметува каматна стапка $6\% \, p.a.(d)$, со полугодишно вкаматување. Пресметај со колкава сума ќе располагаме за осум години од денес.

7*. Пред 15 години, во банка се вложени 7000 денари, пред 9 години уште 4000 денари, а пред 5 години од сметката биле подигнати 5000 денари. Со колкава сума располагаме денес, ако вкаматувањето е тримесечно со каматна стапка $5\% \, p.a.(d)$.

7. 3. Конформна каматна стапка

Од практични причини, кога станува збор за декурзивното вкаматување, се јавува потребата од друг тип на каматна стапка, различен од оние кои досега ги споменавме. Имено, фактот дека при зголемување на бројот на вкаматувања во текот на годината, кај декурзивното вкаматување, се зголемува и вредноста на капиталот, како последица на зголемување на каматата, може да доведе до извесни недоразбирања. Со користење на релативната каматна стапка, се постигнува пресметувањето на каматата да се врши не само на главницата туку и на каматата. Тогаш се јавува разлика во пресметаната идна вредност на сумата при едно вкаматување годишно и при повеќе вкаматувања во текот на годината. Доколку сакаме оваа разлика да се избегне, место релативната каматна стапка се користи така наречена **конформна каматна стапка**, стапка која и покрај зголемувањето на бројот на капитализирања во текот на една година, дава исти износи на камати како и годишната каматна стапка со едно капитализирање. Конформната каматна стапка ќе ја бележиме со $p_{k,m}$. **Конформната каматна стапка**, која со m вкаматувања во текот на една година дава еднакви износи како и стапката p со едно вкаматување годишно, се добива со изедначување на следниве две формули:

$$K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = K\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

односно $\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = \left(1+\frac{p}{100}\right).$

Оттука, за конформната стапка добиваме:

$$\boxed{p_{k,m} = 100\cdot\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right)}.$$

Добиената конформна каматна стапка секогаш е помала од релативната каматна стапка.

1. Колкава е тримесечната конформна каматна стапка ако годишната номинална стапка е $p=12\%\, p.a.(d)$? Спореди ја добиената стапка со релативната и спореди ги идните вредности на капитал од 10000 денари, кои се добиваат со примена на двете стапки за време од една година.

Бројот на вкаматувања е $m=4$. Директно по добиената формула добиваме $p_{k,4}=100\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{12}{100}}-1\right)=2{,}87\%$. Од друга страна, релативната каматна стапка која одговара на едно тримесечје е $\frac{12}{4}=3\%$, значи поголема од конформната стапка. Применувајќи ја конформната стапка, идната вредност на сумата е $K_1=10000\cdot\left(1+\frac{2{,}87}{100}\right)^4=11198{,}37$ денари, а со користење на релативната стапка $K_1'=10000\cdot\left(1+\frac{12}{4\cdot100}\right)^4=11255$ денари. ♦

2. На која сума ќе нарасне износот од 25000 денари за 20 години со номинална каматна стапка од 8% $p.a.(d)$, ако вкаматувањето е полугодишно и тримесечно, со користење на конформна каматна стапка.

а) Нека $m=2$. Конформната стапка која одговара на две вкаматувања годишно е $p_{k,m}=100\left(\sqrt{1+\frac{8}{100}}-1\right)=3{,}923\%$. За идната вредност на капиталот се добива $K_{20}=K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^{40}=25000\cdot1{,}03923^{40}=116521{,}755$. Вредноста на вака добиениот капитал е помала од пресметаната вредност со користење на релативна каматна стапка, но скоро еднаква со вредноста на капиталот со едно вкаматување.

Така, $K_{20}'=25000\cdot\left(1+\frac{8}{2\cdot100}\right)^{40}=120025{,}52$ денари се добиваат со користење на релативната каматна стапка, додека со едно вкаматување годишно добиваме $K_{20}''=25000\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right)^{20}=116523{,}93$ денари.

б) Нека $m=4$. Конформната стапка е $p_{k,m}=100\left(\sqrt[4]{1+\frac{8}{100}}-1\right)=1{,}943\%$. Идната вредност на капиталот, со користење на конформната стапка е $K_{20}=K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^{20\cdot4}=25000\cdot1{,}01943^{80}=116555{,}51$ денар. Со користење на релативната стапка имаме $K_{20}'=K\left(1+\frac{8}{4\cdot100}\right)^{80}=25000\cdot1{,}02^{80}=121885{,}98$ денари, а со едно вкаматување годишно исто како претходно, $K_{20}''=2116523{,}93$ денари. ♦

Отстапувањето кое се јавува во однос на пресметаната идна вредност на капиталот, со едно вкаматување годишно е резултат на заокружувањето кое го правиме при пресметувањето на конформната каматна стапка.

Задачи за самостојна работа

1. Ако денес вложиме 28000 денари со каматна стапка $2\%\,p.q.(d)$, тогаш со која сума ќе располагаме по 2 години и 9 месеци, при полугодишно вкаматување? Да се примени конформна каматна стапка.

2. Денес вложуваме 10000 денари, а по две години треба да подигнеме 7500 денари. Со која сума ќе располагаме три години од сега, доколку каматната стапка е $9\%\,p.s.(d)$, со тримесечно вкаматување. Да се примени конформна каматна стапка.

3. На која сума ќе нараснат 20000 денари, за време од 10 години, со каматна стапка $8\%\,p.a.(d)$, ако вкаматувањето е тримесечно со
а) релативна каматна стапка; б) конформна каматна стапка.

4. Тримесечната конформна стапка од $1{,}467\%$, претвори ја во годишна каматна стапка.

5. Ако каматната стапка е $8\%\,p.a.(d)$, пресметај ги полугодишната и тримесечната конформна каматна стапка.

6*. Пред 15 години во банка се вложени 7000 денари, пред 9 години уште 4000 денари, а пред 5 години од сметката биле подигнати 5000 денари. Со колкава сума располагаме денес, ако вкаматувањето е тримесечно со каматна стапка $5\% \, p.a.(d)$. Да се пресмета износот со конформна каматна стапка.

7. 4. Пресметување на почетната вредност на сумата и пресметаната камата

Постојат реални ситуации во кои знаеме колку средства ни требаат по извесен временски период, при познати услови за вкаматување, но она што не знаеме и треба да се пресмета, е колку треба да вложиме. Всушност треба врз основа на познат износ на вкаматена сума K_n, да ја пресметаме почетната сума K, односно почетниот капитал, ако ја знаеме соодветната каматна стапка, бројот на вкаматувања годишно m и времето за кое се вкаматува n. Со трансформација на познатите равенки за идната вредност на сумата, ги добиваме следниве формули за почетниот капитал:

$$K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1+\frac{p}{100m})^{nm}},$$ при декурзивно вкаматување, како и

$$K = K_n \rho^{-nm} = K_n \left(1-\frac{\pi}{100m}\right)^{nm},$$ при антиципативно вкаматување.

Постапката на одредување на почетната вредност на сумата, се нарекува **дисконтирање**, односно определување на почетна вредност на сумата. Реципрочните вредности на каматните фактори, r^{-nm} и ρ^{-nm}, се нарекуваат **дисконтни фактори**.

Забелешка 1. Важно е да кажеме што се случува кога се користат i/i таблиците. Имено, за вредностите I_p^n и I_π^n, кои одговараат на каматните фактори при декурзивно и антиципативно вкаматување, соодветно, се дефинираат и дисконтните фактори $\mathrm{II}_p^n = \frac{1}{\mathrm{I}_p^n} = r^{-n}$ и $\mathrm{II}_\pi^n = \frac{1}{\mathrm{I}_\pi^n} = \rho^{-n}$, вредности кои се читаат од вторите таблици. Вторите таблици претставуваат реципрочни вредности на првите таблици. Тогаш формулите за пресметување на почетната вредност добиваат облик

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_p^n},$$

за декурзивно годишно вкаматување и

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_\pi^n},$$

при антиципативно годишно вкаматување.

Се разбира, кога се вкаматува повеќе пати годишно, времето се множи, а каматната стапка се дели со начинот на вкаматување, па почетната сума се пресметува според формулите $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}^{nm}_{\frac{p}{m}}}$, при декурзивно и $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}^{nm}_{\frac{\pi}{m}}}$, при антиципативно вкаматување.

1. Колку треба да вложиме, ако со каматна стапка $6\%\, p.a.(d)$ и годишно вкаматување, сакаме да заштедиме 68000 денари, за четири години?

Јасно, $m = 4, K_4 = 68000, p = 6\%\, p.a.(d)$. Да го пресметаме каматниот фактор,а од него и дисконтниот фактор. Имено, $r = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$. Соодветниот дисконтен фактор е $\frac{1}{r} = 0{,}9434$. Тогаш, почетниот капитал изнесува $K = \frac{68000}{1{,}06^4} = 68000 \cdot 0{,}9434^4 = 53862{,}3$ денари. ♦

2. Кој износ, вкаматуван во тек на четири години, со каматна стапка $8\%\, p.a.(d)$ и

а) полугодишно; б) тримесечно вкаматување,

ќе ни донесе сума од 10000 денари?

Крајната вредност на сумата е $K_4 = 10000$. Ќе ги разгледаме посебно двата случаи:

а) $m = 2, r = 1 + \frac{8}{200} = 1{,}04$, па $K = 10000 \cdot 1{,}04^{-4 \cdot 2} = 7306{,}9$ денари;

б) $m = 4, r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$, а оттука $K = 10000 \cdot 1{,}02^{-4 \cdot 4} = 7284{,}46$ денари. ♦

3. Пред шест години сме вратиле долг од 27000 денари, а по десет години имаме за враќање долг од 36000 денари. Со која сума би можеле да го отплатиме целосниот долг денес, во случај да не сме биле во можност да го вратиме стариот долг, ако каматната стапка е $4\%\, p.a.(d)$, а вкаматувањето полугодишно? Колкава сума е потребна доколку вкаматувањето е под истите услови, но со антиципативна каматна стапка?

Доколку не сме успеале да го вратиме долгот, неговата вредност до денес се зголемила и тоа на износ вкаматен за 12 периоди, со релативната каматна стапка $2\%\, p.s.(d)$. Значи неплатениот долг денес би изнесувал

$27000 \cdot \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{12} = 27000 \cdot 1{,}02^{12}$. Во исто време, вториот долг би го вратиле пред време, па неговата вредност ќе се дисконтира за десет години station наназад и ќе биде $36000 \cdot \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{-20} = 36000 \cdot 1{,}02^{-20}$ (црт. 2).

Црт. 2

Севкупниот долг денес е збир од двете пресметани вредности, па потребната сума е

$$S = 27000 \cdot 1{,}02^{12} + 36000 \cdot 1{,}02^{-20} = 58469{,}5 \text{ денари.}$$

Во случај на антиципативна стапка, каматниот фактор е

$\rho = \dfrac{100}{100-2} = 1{,}020408$. Потребната сума би била:

$$S = 27000 \cdot 1{,}020408^{12} + 36000 \cdot 1{,}020408^{-20} = 88330{,}94 \text{ денари.} \blacklozenge$$

Уште едно прашање кое се поставува е прашањето колкава камата е пресметана за вложените средства во банка или за долгот кој треба да се врати. Знаејќи ги вредностите на почетниот капитал и крајната сума на капиталот, пресметаната камата не е ништо друго туку разликата на крајната и почетната вредност на сумата. Ако пресметаната камата на крајот на $n-$тиот период на вкаматување ја означиме со I_n, тогаш истата може да се пресмета по формулата $I_n = K_n - K$, без разлика на начинот на вкаматувањето.

Поконкретно, во случај на декурзивно вкаматување со каматна стапка p, со m периоди на вкаматување годишно, пресметаната камата изнесува:

$$I_n = K_n - K = Kr^{nm} - K = K\left(r^{nm} - 1\right),$$

каде r е декурзивниот каматен фактор.

Во случај на антиципативно вкаматување, со каматна стапка π и m периоди на вкаматување годишно, за пресметаната камата добиваме:

$$I_n = K_n - K = K\rho^{nm} - K = K\left(\rho^{nm} - 1\right),$$

за ρ антиципативен каматен фактор.

Многу лесно, истите формули може да се запишат и доколку е позната само крајната вредност на сумата. Тогаш,

$$I_n = K_n - K = K_n - K_n r^{-nm} = K\left(1 - r^{-nm}\right),$$

при декурзивно пресметување и соодветно при антиципативно вкаматување:

$$I_n = K_n - K = K_n - K_n \rho^{-nm} = K\left(1 - \rho^{-nm}\right).$$

Забелешка 2. Доколку ги користиме i/i таблиците, формулите стануваат $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm} - 1\right)$, за декурзивен случај и $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}_{\frac{\pi}{m}}^{nm} - 1\right)$, за антиципативниот случај. Кога би ја користеле крајната вредност на сумата, формулите може да ги запишеме во облик $I_n = K_n\left(1 - \mathrm{II}_{\frac{p}{m}}^{nm}\right)$, односно $I_n = K_n\left(1 - \mathrm{II}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}\right)$.

4. Пред 30 години, вложени се 10000 денари со каматна стапка $6\%\,p.a.$, со полугодишно вкаматување. Колкава е пресметаната сложена камата до сега, ако вкаматувањето е:

а) декурзивно; б) антиципативно?

Позната е почетната вредност на сумата $K = 10000$, релативната каматна стапка 3%, како и бројот на вкаматувања во текот на една година $m = 2$. Тогаш вкупниот број на вкаматувања е 60.

а) За декурзивниот каматен фактор добиваме $r = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$. Пресметаната камата е $I_{30} = K_{30} - K = 10000 \cdot \left(1{,}03^{60} - 1\right) = 48196$ денари.

б) Антиципативниот фактор е $\rho = \frac{100}{100-3} = 1{,}03093$, а пресметаната камата е $I_{30} = K_{30} - K = 10000 \cdot \left(1{,}03093^{60} - 1\right) = 52194{,}3$ денари.

Последнава задача е уште една потврда дека антиципативното вкаматување е поволно за доверителите, а неповолно за корисниците на заеми. ♦

5. Денес е вложена сума, која за една година и шест месеци со пресметаната камата нараснува на 36000 денари. Колкава е пресметаната камата, ако каматната стапка е $8\%\,p.a.$ со тримесечно вкаматување кое е:

а) декурзивно; б) антиципативно?

Знаеме дека крајната вредност на сумата е $K_{1,5} = 36000, m = 4,$ а се вкаматува вкупно 6 пати.

а) Дисконтниот декурзивен фактор е $\frac{1}{r} = \frac{1}{1{,}02} = 0{,}9804$, а пресметаната камата во овој случај изнесува $I_{1,5} = K_{1,5}\left(1 - \frac{1}{r^6}\right) = 36000 \cdot \left(1 - 0{,}9804^6\right) = 4031{,}5$ денари.

б) Дисконтниот антиципативен фактор е $\frac{1}{\rho} = \frac{100-2}{100} = 0{,}98$, а пресметаната камата е $I_{1,5} = K_{1,5}\left(1 - \rho^{-6}\right) = 36000 \cdot \left(1 - 0{,}98^6\right) = 4109{,}67$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Колкав износ сме вложиле во банка пред 20 години, ако денес имаме 250000 денари, при што во текот на целиот период вкаматувањето било тримесечно со каматна стапка:

а) $p = 6\%\,p.a.(d)$; б) $\pi = 6\%\,p.a.(a)$.

2. Лице треба да плати 16000 по две години, 24000 денари по пет години и 18000 денари по осум години. Со која сума лицето ќе го исплати долгот денес, ако каматната стапка е $6\%\, p.a.$, со полугодишно вкаматување, во случај на:

а) декурзивно; б) антиципативно вкаматување?

3. Лице, пред својот $38-$ми роденден, ризично инвестира 50000 денари со каматна стапка $48\%\, p.a.(d)$ и месечно вкаматување. Колкава камата е пресметана за вложените средства по точно една година?

4*. Лице вложува 50000 денари, а по две години повлекува 30000 денари. Колкава е пресметаната камата по пет години од денес, ако каматната стапка е $12\%\, p.a.(d)$ со тримесечно вкаматување?
(Забелешка. Каматата мора да се пресмета во два дела, две години од сега, па втора камата за остатокот по повлекување на средствата.)

5*. Пред четири години, лице отплатило дел од долгот во износ од 24000 денари. По три години, треба да исплати уште 30000 денари. Под претпоставка дека лицето не вратило ништо од долгот, со која сума лицето ќе го исплати целиот долг, за две години од сега? Каматната стапка е $6\%\, p.a.$ со годишно декурзивно вкаматување? А колкава сума е потребна во случај на антиципативно вкаматување?

7. 5. Пресметување на периодите на вкаматување и каматната стапка

Во досега изведените формули, користевме број на години n однапред познат и најчесто изразен само во години, со точно наведени периоди кои се совпаѓаат со вкаматувањето. Во оние задачи во кои времето беше зададено поинаку, го претворавме во години. Во практика, тоа ретко се случува, посебно кога треба да се пресмета времето на вкаматување. Ќе видиме како да го пресметаме времето за кое даден капитал носи определена камата, односно ќе го пресметаме бројот на вкаматувања. Ќе разгледаме почетна сума K, која се вкаматува со декурзивна стапка $p\%\, p.a.(d)$, со m вкаматувања годишно, во тек на време n, кое не мора да е цел број години. Од формулата за пресметување на идната вредност на сумата $K_n = K\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}$, со трансформации ќе го изведеме времето n. Така,

$$\frac{K_n}{K} = \left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

од каде со логаритмирање се добива:

$$\log\frac{K_n}{K} = \log\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}.$$

Користејќи ги својствата на логаритми може да запишеме:

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\log\left(1+\frac{p}{100m}\right).$$

Во формулата ќе го вметнеме декурзивниот фактор $r = 1+\frac{p}{100m}$, па се добива:

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log r}\log\frac{K_n}{K}},$$

што е точно формулата за пресметување на времето на вкаматување.

Често пати, логаритамот со основа 10, се заменува со логаритам со основа e, односно може да ја сретнеме и еквивалентната формула:

$$n = \frac{1}{m\ln r}\ln\frac{K_n}{K}.$$

Слично, во случај кога вкаматувањето е антиципативно, каматната стапка $\pi\%\, p.a.(a)$, за пресметување на времето за кое се врши вкаматувањето, при m вкаматувања годишно, со логаритмирање на релацијата за крајната вредност на капиталот добиваме:

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right).$$

Со замена на антиципативниот каматен фактор $\rho = \frac{100m}{100m-\pi}$, формулата станува

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\rho,$$

односно времето го пресметуваме со формулата:

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log\rho}\log\frac{K_n}{K}}.$$

1. а) За колку години, износ од 25000 денари со $6\%\, p.a.(d)$, ќе нарасне на $29851{,}31$ денари, при полугодишно вкаматување?

б) За кое време, капитал од 13200 денари, ќе се вкамати до $18425{,}7$ денари со каматна стапка $8\%\, p.a.(a)$ и годишно вкаматување.

Податоците кои се дадени во условите на задачата се сосема соодветни на формулата за пресметување на времето. По пресметување на каматниот фактор, со директна замена во формулата, имаме:

а) $r = 1+\frac{6}{200} = 1{,}03$, од каде $n = \frac{1}{2\log 1{,}03}\log\frac{29851{,}31}{25000} = 3$ години.

б) $\rho = \frac{100}{100-8} = 1{,}0869565$, од каде $n = \frac{1}{\log 1{,}0869565}\log\frac{18425{,}7}{13200} = 4$ години. ♦

Логаритмирањето кое го направивме во формулата, може да се направи и на крај, откако во формулата за идната вредност ќе се заменат сите познати податоци.

Исто така, времето се добива и од таблиците i/i, од формулата за пресметување на идната вредност на сумата, читајќи во правата i/i таблица или пак од формулата за почетната вредност на сумата, читајќи од втората i/i таблица.

2. За колку години, сума од 200000 денари, вложена со каматна стапка $5\%\, p.a.(d)$, со годишно вкаматување, ќе нарасне на $243101{,}25$ денари?

Од формулата за идната вредност на сумата имаме $K_n = K \cdot \mathrm{I}_p^n$, од каде за табличната вредност на каматниот фактор имаме $\mathrm{I}_5^n = \dfrac{243101{,}25}{200000} = 1{,}21550625$. Во првата финансиска таблица, во делот за каматна стапка од 5%, ја наоѓаме вредноста $1{,}21550625$ во редицата која одговара на $n = 4$. ♦

Но, при користење на i/i таблиците, се случува вредноста која сме ја добиле со пресметки, да ја нема во таблиците, но добиената вредност може да се смести меѓу две вредности од таблицата. Тогаш, се применува постапка позната како линеарна интерполација. Принципот на кој се заснова методот на линеарна интерполација е својство на пропорциите. Имено, разликите на табличните вредности се однесуваат меѓу себе, како и разликите на соодветните периоди. Да го видиме тоа на конкретен пример.

3. За кое време, 50000 денари, со $6\%\, p.a.(d)$ камата и семестрално вкаматување, ќе нараснат на 75000 денари?

Формулата за идната вредност на сумата, користејќи таблици, во нашиот случај е $K_{2n} = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$, од каде табличната вредност која ја бараме е $\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n} = \dfrac{K_{2n}}{K} = \dfrac{75000}{50000} = 1{,}5$. Во првата i/i таблица, во колоната за каматна стапка 3%, колку што е релативната стапка што ја користиме, не ја наоѓаме вредноста $1{,}5$. Но наоѓаме вредности меѓу кои таа е сместена, па така $1{,}46853371 < 1{,}5 < 1{,}51258972$, помалата вредност одговара на 13, а поголемата на 14 периоди на вкаматување, кои ги читаме по редици. Одговорот на нашата задача е време на вкаматување помеѓу 13 и 14 семестри, но треба да утврдиме колку точно. За таа цел, формираме табела во која ги сместуваме познатите вредности на следниот начин:

$\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$	$2n$	$\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$	$2n$
$1{,}46853371$	13	$1{,}46853371$	13
$1{,}51258972$	14	$1{,}5$	$2n$

Откако ќе ги пресметаме разликите по колони, кои за поголема прегледност може да се сместат во истата табела, ја составуваме пропорцијата:

$$(1{,}51258972-1{,}46853371):(14-13)=(1{,}5-1{,}46853371):(2n-13).$$

Значи,

$$2n-13=\frac{0{,}03146629}{0{,}04405601},$$

од каде $2n=13{,}714$, односно вкаматувањето трае вкупно $n=6{,}857$ години. За да го претвориме бројот во години, месеци и денови, децималниот дел го множиме со 12 и ги добиваме месеците, а новиот децимален дел со 30, од каде ги добиваме деновите. Значи, делот $0{,}857$ години е всушност $0{,}857\cdot 12=10{,}284$ месеци, а $0{,}284$ во денови изнесува $0{,}284\cdot 30\approx 9$ дена. Конечно, вкаматувањето трае 6 години, 10 месеци и 9 дена. ♦

На ист начин се користи втората финансиска таблица за пресметување на времето на вкаматување.

4. За кое време, 20000 денари, заедно со $6\%\, p.a.(d)$ камата, при полугодишно вкаматување, ќе нараснат на 80000 денари?

а) Прво да добиеме решение директно по формула, со логаритмирање. Каматниот фактор е $r=1{,}03$, $m=2$, па по формулата за идната вредност на сумата $\frac{80000}{20000}=1{,}03^{2n}$. Ако последното равенство го логаритмираме, со примена на својствата на логаритми добиваме $\log 4=2n\cdot\log 1{,}03$, од каде $n=23{,}4527$ години.

б) Да видиме како ќе дојдеме до истиот резултат користејќи ја втората финансиска таблица, односно формулата за пресметување на почетната вредност на сумата. Имено, $K=K_n\cdot \mathrm{II}_3^{2n}$, од каде $\mathrm{II}_3^{2n}=\frac{1}{4}=0{,}25$, вредност која во втората таблица, во колоната за 3% не постои пресметана. Но ги наоѓаме двете најблиски вредности и тоа $0{,}2493<0{,}25<0{,}2567$. Помалата вредност соодветствува на 47 семестри, а помалата на 46. Ќе ги внесеме вредностите во табела, во која ќе ја додадеме, во последна редица и разликата по колони, за полесно да ја составиме соодветната пропорција.

II_3^{2n}	$2n$	II_3^{2n}	$2n$
0,2567	46	0,2567	46
0,2493	47	0,25	$2n$
0,0074	-1	0,0067	$46-2n$

Соодветната пропорција е:

$$0{,}0074:(-1)=0{,}0067:(46-2n),$$

односно ослободувајќи се од негативниот знак:

$$0{,}0074=0{,}0067:(2n-46).$$

Сега, $2n-46=\dfrac{0{,}0067}{0{,}0074}=0{,}9054$, од каде $2n=46{,}9054$. Тогаш, времето на вкаматување е $n=23{,}4527$ години, што е точно 23 години, 5 месеци и 13 дена. ♦

Иако двата примери се со примена на декурзивна каматна стапка, решавањето на задачи со антиципативна каматна стапка, ги користи соодветните антиципативни таблици, а се пресметува и соодветниот антиципативен каматен или дисконтен фактор. Примената на линеарната интерполација е на истиот начин.

Алгебарски, со трансформација на познатите формули, или со користење на финансиските таблици, може да дојдеме и до вредноста на непознатата каматна стапка, кога другите величини во формулите за крајната или почетната вредност на сумата се познати.

Ќе разгледаме вкаматување со декурзивна каматна стапка $p\%\, p.a.(d)$, со m вкаматувања годишно, во тек на n години. Од формулата за пресметување на идната вредност на сумата:

$$K_n=K\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

со коренување, имаме $1+\dfrac{p}{100m}=\sqrt[nm]{\dfrac{K_n}{K}}$, односно за каматната стапка важи

$$p=100m\cdot\left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}-1\right).$$

5. Со која годишна декурзивна каматна стапка, почетен капитал, за 8 години со четиримесечно вкаматување, ќе донесе камата еднаква со почетниот капитал?

Од условот на задачата имаме дека $I_8=K$, односно во равенката за каматата, со замена добиваме $I_8=K_8-K$, односно $K=K_8-K$. Тогаш, $K_8=2K$. Притоа, $n=8, m=3$. Заменуваме во добиената формула за каматната стапка:

$$p=300\cdot\left(\sqrt[24]{\frac{2K}{K}}-1\right)=300\cdot\left(\sqrt[24]{2}-1\right)=8{,}79\%\, p.a.(d).$$

На истиот пример ќе покажеме како се применуваат i/i таблиците за пресметување на каматната стапка. Единствената разлика, од линеарното интерполирање кај непознатото време на вкаматување, кое го видовме претходно е што сега покрај табличните вредности, во табела ќе ги внесуваме и каматните стапки и тоа релативните. Така, врз основа на горните податоци, може да замениме во формулата за пресметаната камата $I_n=K\cdot\left(\mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm}-1\right)$, поточно,

$$I_8 = K\cdot\left(\mathrm{I}^{nm}_{\frac{p}{m}}-1\right),$$

при што $I_8 = K$.

Тогаш за вредноста од првата финансиска таблица важи $\mathrm{I}^{24}_{\frac{p}{3}}-1=1$, односно $\mathrm{I}^{24}_{\frac{p}{3}}=2$. Во првата i/i таблица, во колоната за каматна стапка од $2{,}75\%$, ја наоѓаме вредноста $1{,}917626$, а во колоната за каматна стапка 3% ја наоѓаме вредноста $2{,}0327491$. Нашата вредност е токму меѓу овие две. Во табела ќе ги внесеме вредности кои ги прочитавме од таблицата.

$\mathrm{I}^{24}_{\frac{p}{3}}$	$\frac{p}{3}$	$\mathrm{I}^{24}_{\frac{p}{3}}$	$\frac{p}{3}$
1,917626	2,75%	1,917626	2,75%
2,0327941	3%	2	$\frac{p}{3}$
0,115168	0,75%	0,0823739	$\frac{p}{3}-2{,}75$

Ја составуваме пропорцијата, имено, разликите на табличните вредности се однесуваат исто како и разликите на каматните стапки, па:

$$0{,}115168 : 0{,}75 = 0{,}0823739 : \left(\frac{p}{3}-2{,}75\right).$$

Тогаш, $\frac{p}{3}-2{,}75=\frac{0{,}75\cdot 0{,}0823739}{0{,}115168}$, од каде за релативната каматна стапка добиваме $\frac{p}{3}=2{,}928\%$, односно номиналната декурзивна каматна стапка е $p=8{,}784\%\,p.a.(d)$. Малото отстапување од претходно добиената вредност се должи на заокружувањето на табличните вредности. ♦

6. Со која антиципативна каматна стапка, 80000 денари, за две години, со полугодишно вкаматување, стануваат 120000 денари.

Ќе ја изведеме формулата директно од познатата формула за идната вредност на сумата. Од

$$K_n = K\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right)^{nm},$$

решавајќи ја како равенка по непозната величина π, со коренување, се добива:

$$\frac{100m}{100m-\pi}=\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}},$$

односно

$$100m-\pi=\frac{100m}{\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}}.$$

За антиципативната каматна стапка имаме:

$$\pi=100m-100m\cdot\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}$$

или конечно

$$\pi=100m\left(1-\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}\right).$$

Во конкретниот пример, $n=2, m=2$, па оттука:

$$\pi=100\cdot 2\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{K}{K_2}}\right)=200\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{80000}{120000}}\right)=200\cdot(1-0{,}9036)=19{,}28\%\,p.a.(a).\blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. За кое време треба 8000 денари да бидат вложени во банка, за истите да нараснат на 55000 денари, ако вкаматувањето е семестрално, со каматна стапка од:

а) $p=8\%p.a.(d)$ б) $p=8\%p.a.(a)$.

2. За кое време, при тримесечно вкаматување, со годишна каматна стапка од 7%, капитал од 20000 денари, ќе нарасне на 40000 денари, ако вкаматувањето е:

а) антиципативно; б) декурзивно?

3. Колкава годишна номинална каматна стапка треба да се применува, за да капитал од 15000 денари нарасне во износ од 286000 денари, за 25 години, со тримесечно вкаматување, ако вкаматувањето е:

а) антиципативно; б) декурзивно?

Задачата да се реши и со примена на таблиците i/i.

4. Со која декурзивна каматна стапка, за време од 18 години, сумата двојно ќе биде зголемена, ако вкаматувањето е годишно? Задачата да се реши и со примена на таблици за интерес на интерес.

5. Денес сме вложиле 20000 денари, а по две години ќе повлечеме 10000 денари. Која каматна стапка е применета, доколку на четири години од денес, ќе располагаме со 30000 денари, со тримесечно вкаматување? Разгледај ги посебно и декурзивниот и антиципативниот случај.

6. 400000 денари треба да се платат во четири еднакви рати со $4\% p.a.(d)$. Првата рата треба да се плати по 4, втората по 6, третата рата по 15 и четвртата рата по 18 години. По колку години, целиот влог може да се исплати одеднаш, со истата каматна стапка и годишно вкаматување?

7. Лицето вложило извесна сума денес и по две години и шест месеци, сумата нараснала на 40000 денари и донела камата 10000 денари. Да се пресмета со која каматна стапка е вложена сумата, доколку вкаматувањето е полугодишно?

8*. На својот $25-$ти роденден, сме вложиле во банка, 40000 денари, а на својот $33-$ти роденден банката не известила дека имаме заштеда од 76800 денари. Која каматна стапка е применета, ако вкаматувањето е полугодишно?

9*. Пред 2 години се вложени 70000 денари, денес се подигнати 20000 денари. По една година ќе вложиме уште 10000 денари. По колку време ќе располагаме со 100000 денари, ако каматната стапка е $10\% p.a.(a)$, со годишно вкаматување?

7. 6. Задачи за вежбање

1. Денес вложуваме 100000 денари. Со која сума ќе располагаме по 15 години и 25 дена, ако каматната стапка е $5\% p.a.(d)$, со тримесечно вкаматување? Пресметај со сложена каматна сметка и со комбиниран метод на проста и сложена каматна сметка.

2. На 10.09.2000 година сме вложиле 12000 денари. Со која сума ќе располагаме на крајот на 31.12.2010 година, ако каматната стапка била $10\% p.a.(a)$ со годишно вкаматување, за цело времетраење на штедењето?

3. Благодарение на новогодишен бонус, на крајот на минатата година сме вложиле 60000 денари, по три години, на крајот на годината, треба да подигнеме 24000 денари, а по пет години од првото вложување, ќе може да вложиме уште 40000 денари. Со која сума ќе располагаме на крајот на осмата година од сега, ако каматната стапка е $3\% p.s.(d)$, со тримесечно вкаматување?

4. Долг од 120000 денари треба да се врати во три еднакви рати и тоа првата по една година од сега, втората по четири години, а третата по шест години. Со која сума може да се врати целиот долг одеднаш на временски период две години и шест месеци од сега, ако каматната стапка е $10\% p.a.(d)$, со полугодишно вкаматување?

5. Лице сака да подигне 600000 денари од банката во која штеди, за осум години од денес. Во моментов вложува 100000 денари, има можност да вложи 200000 денари, по пет години и да го доплати долгот, доколку остане должен дури по 10 години. Колкав ќе биде заостанатиот долг по десет години, ако номиналната каматна стапка е $8\% \, p.a.(d)$ со семестрално вкаматување.

6. Пресметај ја сегашната вредност на долг кој по 25 месеци изнесува 50000 денари, со каматна стапка $8\% \, p.a.(d)$ и квартално вкаматување:

а) употребувајќи само сложена каматна сметка;

б) користејќи комбиниран метод на сложена и проста сметка за последниот месец.

Пресметај ја и каматата која се наплаќа.

7. За колку години, 20000 денари со $5\% \, p.a.(d)$, ќе станат $74669{,}12$ денари, ако вкаматувањето е годишно? Задачата да се реши алгебарски и со примена на таблиците i/i.

8. За кое време, било која сума, со каматна стапка од $6{,}5\% \, p.a.(d)$, тројно ќе се зголеми на сметка на камата, со полугодишно вкаматување? Колку се менува времето при истите услови, со антиципативна каматна стапка? Примени и алгебарски пресметки и финансиски таблици.

9. Пред 15 години се вложени 10000 денари, а пред осум уште 20000 денари. Уште колку треба да вложиме денес, за да по десет години располагаме со 100000 денари? Каматната стапка е $4\% p.a.$, со семестрално декурзивно вкаматување.

10. Која сума за дванаесет години и три месеци при $6\% \, p.a.(a)$ каматна стапка со тримесечно вкаматување, ќе донесе иста камата како и 50000 денари, при исти услови, за триесет години?

11. За својот имот, лице добива три понуди и тоа:

1) 40000 денари веднаш, 120000 денари по 8 години, 7 месеци и 20 дена, со каматна стапка $5\% \, p.a.(d)$;

2) 200000 денари, по $10{,}5$ години, со со каматна стапка $6\% \, p.a.(d)$;

3) 80000 денари веднаш, 100000 денари по 5 години и 6 месеци, со каматна стапка $3\% \, p.a.(d)$.

Да се пресмета која понуда е најповолна?

12. Сума од 100000 денари е вложена со каматна стапка $5{,}4\% \, p.a.(d)$, а сума од 80000 денари, со каматна стапка $9{,}6\% \, p.a.(d)$. Кога и двете суми ќе бидат еднакви, ако вкаматувањето и во двата случаи е тримесечно? Колку се менува времето доколку втората сума се вкаматува антиципативно?

13. Треба да платиме 80000 денари, по 8 години со $3\% \, p.a.(d)$ каматна стапка, 40000 денари, по 20 години со $4\% \, p.a.(d)$ каматна стапка и 20000 денари, по 23 години со $6\% \, p.a.(d)$каматна стапка. Со која каматна стапка, може да се исплати долгот по 25 години, ако вкаматувањето за цело времетраење е семестрално?

14. Претпријатие со ограничена одговорност должи:

- 50000 денари, кои треба да се платат по 5 години, со $5\% \, p.a.(d)$ каматна стапка;
- 80000 денари, кои треба да се платат по 8 години, со каматна стапка $6\% \, p.a.(d)$;
- 40000 денари, по 12 години со $8\% \, p.a.(d)$ каматна стапка.

Во исто време претпријатието побарува 60000 денари, кои треба да ги наплати по 10 години со $3\% \, p.a.(d)$ каматна стапка. Колку изнесува салдото на долгот (но со сложена каматна сметка, не по формулите за проста каматна сметка), кој треба да се плати по 15 години со $5\% \, p.a.(d)$ каматна стапка. Вкаматувањето е годишно.

15*. Лице вложило 18000 денари на својот $34-$ти роденден. На својот $38-$ми роденден вложило уште 12000 денари, а на својот $41-$ви роденден подигнало 24000 денари. Со која сума ќе располага лицето на својот $46-$ти роденден, ако каматната стапка е $8\% \, p.q.(d)$, со тримесечно вкаматување. Примени конформна каматна стапка.

16. Претпријатието СИГА за производ нуди 60000 денари, а претпријатието ГАЦИ, за истиот производ нуди 160000 денари, по 2 години, со каматна стапка $5\% \, p.m.(d)$, со тримесечно вкаматување. Која понуда е поповолна?

17*. Пред 3 години сме вложиле 50000 денари, по една година треба да подигнеме 10000 денари, а по 3 години ни требаат уште 20000 денари, кои ги подигаме од сметката. По колку време може да сметаме дека имаме заштеда од 600000 денари? Каматната стапка е $4\% \, p.a.(d)$ со полугодишно вкаматување.

18. Пред 2 години сме вложиле 80000 денари, по 3 години ќе подигнеме 32000 денари. Со колкава вкупна камата ќе располагаме по 7 години од денес, ако каматната стапка е $5\% \, p.a.(d)$, со годишно вкаматување?

19. Пред 2 години и 3 месеци е вложена сума, која до денес заедно со пресметаната камата изнесува 20000 денари, а пресметаната камата е 5000 денари. Со која декурзивна каматна стапка е пресметана каматата, ако вкаматувањето е тримесечно? Колкава е разликата во стапката, ако вкаматувањето е антиципативно?

20*. Пред година и два месеци, вложени се 12000 денари, а по две години и четири месеци се подигнати 20000 денари, со што сметката е на салдо нула. Со која декурзивна годишна стапка е пресметана каматата, ако вкаматувањето е полугодишно?

21*. Денес се вложени две еднакви суми, во две различни банки. Едната со стапка $16\%\ p.a.(d)$, а другата со каматна стапка $10\%\ p.a.(d)$. По колку време, крајната сума во првата банка ќе биде два пати поголема од крајната сума на вложените средства во втората банка? Колкави се сумите, ако разликата на каматите за тој период е 33200 денари, при полугодишно вкаматување?

Тематски преглед

Пресметаната камата на некоја сума може да биде **проста** и **сложена**. **Простата камата** или простиот интерес, се пресметува на истата непроменета сума на секој период на пресметување на каматата. Кога капиталот во текот на еден пресметковен период се зголемува за пресметаната камата и со тоа претставува основа за пресметување на каматата за наредниот период, зборуваме за пресметување на **сложена камата**, а самото пресметување се нарекува **сложена каматна сметка** или пресметување **интерес на интерес**.

Периодот на кој се пресметува сложената камата се нарекува **период на капитализација** или **период на вкаматување**. Покрај четирите основни величини кои се јавуваат при проста каматна стапка:

- почетна сума (основен капитал, главница) K
- пресметана камата i
- каматна стапка (во проценти) p, инаку еднаква на камата за 100 денари за единица време
- времето за кое се пресметува каматата t, изразено во години или мерки помали или поголеми од година

кај сложената каматна сметка како прв елемент се јавува и

- бројот на вкаматувања во текот на една година m, односно бројот на периоди на вкаматување во годината.

Годишното вкаматување се бележи со (a), полугодишното (семестралното) со (s), тримесечно (квартално) со (q), месечно со (m), при што каматната стапка најчесто се утврдува на годишно ниво.

Доколку каматната стапка е зададена како годишна каматна стапка се означува со $p.a.$, ако е зададена како полугодишна носи додавка $p.s.$, ако е зададена на ниво на тримесечје ја бележиме со $p.q.$, а ако е зададена како месечна камата носи додавка $p.m.$ Вака зададената каматна стапка, се нарекува **номинална каматна стапка.**

Ако периодот на кој е зададена каматната стапка е различен од периодот на кој се врши вкаматувањето потребно е да се изврши изедначување, односно сведување на каматната стапка на периодот на вкаматување. Така добиената каматна стапка се нарекува **релативна каматна стапка.**

Ако вкаматувањето се врши на крајот на секој пресметковен период, станува збор за **декурзивно пресметување на камата**, односно **декурзивно вкаматување**, а каматната стапка се бележи со $p.a.(d)$. Притоа, основата за пресметување на декурзивната камата е капиталот на почетокот од периодот на вкаматување.

Доколку капитализирањето се врши на почетокот на секој период, основата за пресметување на антиципативната камата е капиталот на крајот од периодот на вкаматување, а велиме се работи за **антиципативно вкаматување**. Каматната стапка се бележи со $p.a.(a)$.

Крајната вредност на сумата, зголемена за износот на сложената камата, на крајот на целиот период на вкаматување, ја нарекуваме **идна вредност на сумата**. Почетната вредност на сумата која се вкаматува, K, се нарекува **сегашна вредност на сумата.**

Идната вредност на сума K која се вкаматува декурзивно во период од n години со годишна декурзивна каматна стапка p и m периоди на вкаматувања во една година изнесува

$\boxed{K_n = Kr^{nm}}$ каде $\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}}$ се нарекува декурзивен каматен фактор.

Идната вредност на сума K која се вкаматува антиципативно во период од n години со годишна декурзивна каматна стапка p и m периоди на вкаматувања во една година изнесува

$\boxed{K_n = K\rho^{nm}}$ каде $\boxed{\rho = \frac{100m}{100m - \pi}}$ се нарекува антиципативен каматен фактор.

Каматната стапка која и покрај зголемувањето на бројот на капитализирања во текот на една година, дава исти износи на камати како и годишната каматна стапка со едно капитализирање се нарекува **конформна каматна стапка**. и се означува со $p_{k,m}$. Конформната каматна стапка, која со m вкаматувања во текот на една година, дава еднакви износи како и стапката p со едно вкаматување годишно, се пресметува по формулата

$$\boxed{p_{k,m} = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)}.$$

Почетната вредност K од која се добива вкаматена сума K_n, ако ја знаеме соодветната каматна стапка, бројот на вкаматувања годишно m и времето за кое се вкаматува n, се пресметува по формулите

$$\boxed{K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100m})^{nm}}}$$

при декурзивно вкаматување

$\boxed{K = K_n \rho^{-nm} = K_n \left(1 - \frac{\pi}{100m}\right)^{nm}}$ при антиципативно вкаматување.

Постапката на одредување на почетната вредност на сумата, се нарекува **дисконтирање**, односно определување на почетна вредност на сумата. Реципрочните вредности на каматните фактори, r^{-nm} и ρ^{-nm}, се нарекуваат **дисконтни фактори**.

Кај декурзивно вкаматување со каматна стапка p, со m периоди на вкаматување годишно, пресметаната **камата** изнесува

$\boxed{I_n = K\left(r^{nm} - 1\right)}$, каде r е декурзивниот каматен фактор.

Кај антиципативно вкаматување, со каматна стапка π и m периоди на вкаматување годишно, за пресметаната камата добиваме

$\boxed{I_n = K\left(\rho^{nm} - 1\right)}$, каде ρ е антиципативен каматен фактор.

За пресметување на **времето за кое се врши вкаматувањето**, кога вкаматувањето е декурзивно и каматната стапка $p\%\, p.a.(d)$, при m вкаматувања годишно се користи формулата

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log r} \log \frac{K_n}{K}}$$

За пресметување на времето за кое се врши вкаматувањето, кога вкаматувањето е антиципативно и каматната стапка $\pi\%\, p.a.(a)$, при m вкаматувања годишно се користи формулата

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log \rho} \log \frac{K_n}{K}}.$$

За пресметување на годишната декурзивната каматна стапка со m вкаматувања годишно, во тек на n години се користи формулата

$$\boxed{p = 100m \cdot \left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}} - 1\right)}$$

8. ПЕРИОДИЧНИ ВЛОЖУВАЊА (ВЛОГОВИ) И ПЕРИОДИЧНИ ПРИМАЊА (РЕНТИ)

8. 1. Периодични влогови

При примената на простата и сложената каматна сметка разгледуваме суми кои еднократно се вложуваат, како и примери во кои суми се вложуваат или повлекуваат во различни периоди. Притоа, поединечните вложувања може да бидат еднакви, но и различни, да се менуваат по одреден закон, на пример, да растат или опаѓаат по закон на аритметичка или геометриска прогресија или пак, како кај штедењето, да се менуваат без однапред утврден закон. Но, често пати се случува вложувањата да се повторуваат во еднакви временски интервали. Кога повеќе пати се вложува ист износ, во исти временски периоди и се вкаматува со иста каматна стапка, зборуваме за **влогови**, кои заради истиот износ кој се вложува се нарекуваат уште и постојани влогови.

Во зависност од тоа дали вложувањето (уплатата на влогот) е на почетокот или на крајот на временскиот интервал, разликуваме **антиципативни**, односно **декурзивни влогови**. При вложувањето, секој поединечен влог се вкаматува од моментот на вложување до моментот на пресметувањето на крајната вредност на влоговите. Може да се користи и декурзивно и антиципативно вкаматување. Притоа може поединечните вложувања да се совпаѓаат со вкаматувањето, но може да бидат поретки или почести од вкаматувањето. Се поставува прашањето колкава е вкупната вредност од сите поединечни влогови. **Крајна вредност** на вложувањето се нарекува збирот на вкаматените поединечни влогови на крајот на периодот.

Ќе разгледуваме само поединечни периодични вложувања кај кои вложувањето се совпаѓа со вкаматувањето, при што влоговите се постојани (непроменливи) влогови.

Доколку во текот на годината се уплаќа еден влог, зборуваме за **годишен влог**, ако вложувањето е двапати годишно, влоговите се **шестмесечни** (**семестрални**), за вложување 4 пати годишно, односно на секои три месеци, влоговите се **тримесечни** (**квартални**). Ако вложувањето е еднаш месечно, тогаш влоговите се **месечни**. И овде вкаматувањето може да биде годишно, шестмесечно, тримесечно и така натаму.

Задачи за самостојна работа

1. Што претставува влогот? Кои се неговите основни карактеристики?

2. Какви влогови разликуваме според начинот на пресметување на каматата?

3. Какви влогови разликуваме според бројот на вложувањата?

4. Какви влогови разликуваме според времето на вложување?
5. Што претставува крајната вредност на влоговите?

8. 2. Пресметување на крајната вредност на влоговите

Нека вредноста на секој поединечен влог е V. Нека бројот на поединечните вложувања е n, а каматната стапка на периодот на вкаматување е декурзивна и е $p\%$. Периодот на вкаматување се совпаѓа со периодот на вложување. Нека влогот се уплаќа антиципативно (на почетокот на секој период). Декурзивниот каматен фактор, на периодот на вкаматување е $r = 1 + \frac{p}{100}$. Пресметувајќи сложена камата за секој поединечен влог, ќе ја добиеме крајната вредност на влоговите. Црт. 1 го покажува вложувањето и вкаматувањето.

Црт. 1

Првата вложена сума, вложена на почетокот на првиот период, се вкаматува за n-периоди, со соодветниот каматен фактор r, до крајот на последниот период и изнесува Vr^n. Втората сума V, се вкаматува на $n-1$ период, па нејзината крајна вредност е Vr^{n-1}. На ист начин се вкаматуваат сите поединечни влогови. Претпоследниот влог е во момент на времето $n-2$, а се вкаматува на два периоди, па крајната вредност е Vr^2, додека последниот влог се вкаматува само еднаш и станува Vr. Збирот на сите поединечни антиципативни вложувања, вкаматени до крајот на разгледуваниот период е:

$$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + Vr = V\left(r^n + r^{n-1} + \ldots + r^2 + r\right) = Vr\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1\right).$$

Изразот во заградата претставува збир на n членови на геометриска прогресија, со прв член r и оттука, користејќи ја формулата за збир, добиваме дека сумата на антиципативните вкаматените влогови, со примена на декурзивно вкаматување, се пресметува со:

$$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Забелешка 1. Во таблиците за интерес на интерес, i/i, вредноста на изразот $r\frac{r^n - 1}{r - 1}$, кој ја покажува сумата на вкаматени декурзивни влогови во износ од една парична единица, може да се најде под ознаката III_p^n. Значи, за вредностите во третата таблица важи $\mathrm{III}_p^n = r\frac{r^n-1}{r-1}$. Изразот се добива како збир на вредностите I_p^k, од првата таблица i/i, сумирајќи за иста каматна стапка, за сите периоди од 1 до n, односно $\mathrm{III}_p^n = \mathrm{I}_p^1 + \mathrm{I}_p^2 + ... + \mathrm{I}_p^n$. Притоа, вложувањето е во тек на n години, со каматна стапка $p\% \ p.a.(d)$. Тогаш формулата за пресметување на сумата на вкаматените антиципативни влогови гласи:

$$\boxed{S_n = V \cdot \mathrm{III}_p^n}.$$

Забелешка 2. Ако зададената стапка за секој поединечен период е антиципативна, го користиме антиципативниот каматен фактор ρ, па сумата од антиципативни вкаматени влогови антиципативно вкаматување изнесува:

$$\boxed{S_n = V\rho\frac{\rho^n-1}{\rho-1}},$$

каде $\rho = \frac{100}{100-\pi}$ е антиципативниот каматен фактор.

Користејќи ја третата таблица i/i, за сумата се добива $\boxed{S_n = V \cdot \mathrm{III}_\pi^n}$, каде π е антиципативната каматна стапка.

Во задачите, најчесто, не е зададен вкупниот број на вложувања, туку бројот на вложувања годишно и должината на временскиот интервал на кој се вложува. На пример, се вложува во тек на n години, m пати годишно. Тогаш вкупниот број на вложувања е производот $n \cdot m$.

1. Од денес почнуваме да вложуваме, на почетокот на секое тримесечие, по 5000 денари, во тек на наредните две години. Која е вкупната сума која ќе ја поседуваме на крајот на втората година, ако каматната стапка е 10% $p.a(d)$ со тримесечно вкаматување?

Вредноста на поединечен влог е $V_{aq} = 5000$ денари. Бројот на вложувања е $n - 2 \cdot 4 = 8$, по четири вложувања во тек на секоја година, а декурзивниот каматен фактор ќе се пресмета за тримесечно вкаматување, односно за каматна стапка $\frac{10}{4} = 2{,}5\% \ \ p.q(d)$ (квартална стапка). Тогаш $r = 1 + \frac{2{,}5}{100} = 1{,}025$. Крајната вредност на антиципативните вложувања ќе биде:

$$S_n = Vr\frac{r^n-1}{r-1} = 5000 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^8-1}{1{,}025-1} = 44773 \text{ денари. } \blacklozenge$$

Нека важат истите услови од почетокот, секој влог има вредност V, бројот на вложувања е n, каматната стапка од $p\%$ е декурзивна, а периодот на вкаматување се совпаѓа со периодот на вложување.

Црт. 2

Нека декурзивниот каматен фактор е r, но нека вложувањата се на крајот на секој период, односно нека влоговите се декурзивни. Како што може да се види и на црт. 2 последниот влог не се вкаматува, претпоследниот се вкаматува еднаш, враќајќи се наназад вториот се вкаматува $n-2$ пати, а првиот $n-1$ пати. Соодветните вкаматени износи се V, Vr, $Vr^2,...,Vr^{n-2}$, Vr^{n-1}. За збирот на вкаматените влогови (крајната вредност) добиваме:

$$S_n = V + Vr + Vr^2 + ... + Vr^{n-2} + Vr^{n-1} = V\left(1 + r + r^2 + ... + r^{n-2} + r^{n-1}\right).$$

Со оглед на тоа што изразот во заградата претставува збир на n членови на геометриска прогресија со прв член 1 и количник r, за крајната вредност на декурзивните влогови имаме:

$$\boxed{S_n = V\frac{r^n - 1}{r-1}}.$$

Забелешка 3. Изразот $\frac{r^n - 1}{r-1}$, во i/i таблиците може да се најде во облик $\left(1+\text{III}_p^{n-1}\right)$. Значи, формулата за пресметување на сумата на вкаматени декурзивни влогови со декурзивно вкаматување се запишува во облик:

$$\boxed{S_n = V\cdot\left(1+\text{III}_p^{n-1}\right)}.$$

Забелешка 4. Доколку се користи антиципативно вкаматување, крајната вредност на влоговите добива облик:

$$\boxed{S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho-1}},$$

каде ρ е соодветниот антиципативен каматен фактор, $\rho = \frac{100}{100-\pi}$. Користејќи ги третите i/i таблици, вкупната вредност на вкамтените декурзивни влогови со антиципативно вкаматување се пресметува со:

$$\boxed{S_n = V\cdot\left(1+\text{III}_\pi^{n-1}\right)}.$$

2. Во банка вложуваме по 10000 денари, на крајот на секоја година, во текот на четири години. Колкава е крајната вредност на вложувањето на крај на четвртата година, ако каматната стапка е е 6% $p.a(d)$, со годишно вкаматување?

Од условите во задачата имаме $V_{da} = 10000$ денари, $n = 4$, $r = 1{,}06$. За крајната вредност на декурзивните влогови се добива:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} = 10000 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06 - 1} = 43746 \text{ денари. } \blacklozenge$$

Можеме да забележиме дека, антиципативните влогови со декурзивно вкаматување, при исти услови, носат r пати поголема крајна вредност од декурзивните влогови со декурзивно вкаматување, односно:

$$S_n{}^a = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1} = r \cdot S_n{}^d,$$

а во случај кога вкаматувањето е антиципативно, $S_n{}^a = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = \rho \cdot S_n{}^d$ значи, антиципативните влогови со антиципативно вкаматување носат ρ пати поголема сума од декурзивните влогови со антиципативно каматување и исти услови на вложување.

(за пократок запис, $S_n{}^a$ означува крајна вредност на антиципативните, а $S_n{}^d$ на декурзивните влогови).

3. Во текот на една и половина година, лице вложува на крајот на секој месец по 3000 денари. Со колкава сума ќе располага лицето на крајот на периодот, ако каматната стапка е 6% $p.a(d)$ со месечно вкаматување?

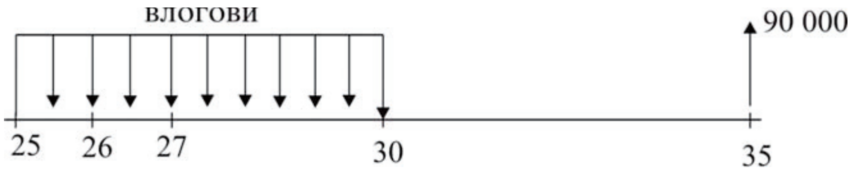
Од условите $V_{dm} = 3000$ денари, $p = 6\%$ $p.a(d)$. Вкупниот број на вложувања е $n = 12 \cdot 1{,}5 = 18$ (1,5 година по 12 влога годишно), а каматната стапка која одговара на месечно вкаматување е $\frac{6}{12}\%$, односно 0,5% $p.m(d)$. Декурзивниот каматен фактор е $r = 1 + \frac{0{,}5}{100} = 1{,}005$.

За крајната вредност на декурзивните влогови добиваме:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} = 3000 \cdot \frac{1{,}005^{18} - 1}{1{,}005 - 1} = 56357 \text{ денари. } \blacklozenge$$

4. Почнувајќи од 25-тиот роденден, па сé до 30-тиот роденден, на крајот на секои шест месеци, лице вложува по 8000 денари. На својот 35-ти роденден лицето треба да подигне 90000 денари. Дали лицето ќе има доволно средства ако каматната стапка е $p = 8\%$ $p.a(d)$ со семестрално вкаматување?

Во текот на 5 години, лицето вложува декурзивни влогови од $V_{ds} = 8000$ денари. Крајната вредност на 30-тиот роденден продолжува да се вкаматува уште 5 години (црт. 3). Се поставува прашањето дали на денот на 35-тиот роденден, вкаматениот износ е поголем од 90000 денари, односно дали $S_n \cdot r^{10} - 90000 \geq 0$? Каматниот фактор е $r = 1 + \frac{8}{2 \cdot 100} = 1{,}04$, а вкупниот број на влогови е $n=10$.



Црт. 3

Тогаш,

$$V\frac{r^{10}-1}{r-1}\cdot r^{10}-90000=8000\cdot\frac{1{,}04^{10}-1}{1{,}04-1}\cdot 1{,}04^{10}-90000=6049 \text{ денари.}$$

Значи, лицето има доволно средства за подигање на 90000 денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Колкава е крајната сума на влогови од 5000 денари, кои се вложуваат во текот на 16 години, на почетокот на секое полугодие, ако каматната стапка е:

а) 4% $p.a(d)$ со семестрално вкаматување;

б) 4% $p.a(a)$ со семестрално вкаматување?

2. На крајот на секоја година, во текот на 10 години, вложуваме по 10000 денари, со каматна стапка 4% $p.a(d)$ и годишно вкаматување. Пресметај ја крајната вредност на влоговите, на денот на последниот влог.

3. На која сума ќе нарасне полугодишен влог од 1000 денари, ако вложуваме 12 години со 8% $p.a(d)$ камата и полугодишно вкаматување и ако влоговите се:

а) декурзивни; б) антиципативни?

4. На која сума ќе нарасне влог од 3000 денари, за 8 години, ако уплатата е на крајот на секој месец, со каматна стапка:

а) 12% $p.a(d)$ со месечно вкаматување;

б) 12% $p.a(a)$ со месечно вкаматување?

5. Пресметај ја крајната сума на влогот од задача 4, при истите услови, но за антиципативен месечен влог. Спореди ги добиените вредности. Кој вид на влог и со каква каматна стапка носи најголема крајна вредност?

8. 3. Пресметување на вредноста на поединечниот влог

Нека се познати каматната стапка $p\% \, p.a.(d)$, крајната вредност на влоговите S_n и времето на вложување. За да се пресмета износот на постојаниот влог, од формулата за крајна вредност на антиципативен влог $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$, за влогот V добиваме:

$$\boxed{V = S_n \frac{r-1}{r(r^n - 1)}}.$$

1. На крајот на петгодишен период на вложување, крајната вредност на влоговите изнесува 40000 денари. Колкав влог се уплаќал на почетокот на секоја година со каматна стапка 6% $p.a(d)$ со годишно вкаматување?

Станува збор за антиципативен влог, со декурзивен каматен фактор $r = 1{,}06$. Вложени се вкупно $n = 5$ влогови, крајната вредност на вложените суми е $S_n = 40000$ денари, а треба да се пресмета вредноста на поединечниот годишен влог. Со замена на познатите големини, во конкретниот пример добиваме: $V_a = 40000\frac{1{,}06 - 1}{1{,}06 \cdot (1{,}06^5 - 1)} = 6694$ денари. ♦

Ако се познати каматната стапка $p\% \, p.a.(d)$, крајната вредност на влоговите S_n и времето на вложување, за да се пресмета износот на постојаниот влог, од формулата за крајна вредност на декурзивен влог $S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}$, за влогот V добиваме:

$$\boxed{V = S_n \frac{r-1}{r^n - 1}}.$$

Забелешка 1. Во случај кога вкаматувањето е антиципативно, соодветните формули за вредноста на поединечниот влог се:

за антиципативно вложување

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho - 1}{\rho(\rho^n - 1)}},$$

и за декурзивно вложување

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho - 1}{\rho^n - 1}}.$$

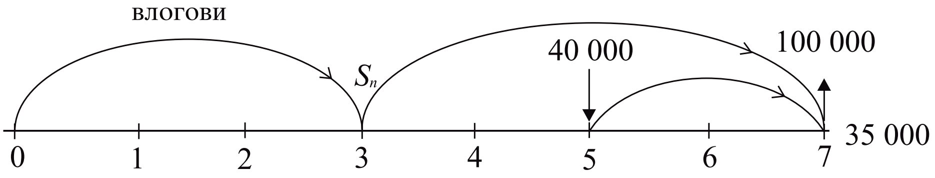
2. Колкав влог треба да уплаќаме на крајот на секој семестар, во текот на 5 години, ако ни се потребни 120000 денари на крајот на петтата година? Каматната стапка е 5% $p.a(d)$ со семестрално вкаматување.

Бројот на вложувањата е $n = 10$, $S_n = 120000$ денари, а декурзивниот каматен фактор е $r = 1 + \frac{5}{2 \cdot 100} = 1{,}025$. Тогаш,

$$V = S_n \frac{r-1}{r^n - 1} = 120000 \cdot \frac{1{,}025 - 1}{1{,}025^{10} - 1} = 10714 \text{ денари. } \blacklozenge$$

3. Наредниве три години ќе уплаќаме тримесечни влогови на почетокот на секој квартал. Пет години од денес еднократно вложуваме 40000 денари. По седум години од денес треба да подигнеме 100000 денари. Каматната стапка е 8% $p.a(d)$ за целиот временски период, со квартално вкаматување. Колкав треба да биде периодичниот влог за седум години од денес на сметката да ни останат 35000 денари?

Да ги прикажеме вложувањата и подигањата на временска оска (црт. 4).



Црт. 4

Откако ќе се пресмета крајната сума на влоговите, таа се вкаматува уште 4 години. Вложените 40000 денари се вкаматуваат уште 2 години. По повлекувањето на средствата важи следново равенство:

$$S_n \cdot r^{4 \cdot 4} + 40000 \cdot r^{2 \cdot 4} - 100000 = 35000.$$

Последното равенство ги покажува преземените чекори сведени на седум години од сега. Притоа, $S_n = Vr\frac{r^{3 \cdot 4} - 1}{r - 1}$, сума на антиципативни влогови, кои се $n = 12$ на број, со декурзивен каматен фактор $r = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$. Релативната квартална каматна стапка е 2%. S_n се вкаматува 16 пати, а износот од 40000 денари, 8 пати. Тогаш,

$$V \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot 1{,}02^{16} + 40000 \cdot 1{,}02^{8} = 135000$$

$$V \cdot 18{,}78 + 46866 = 135000$$

и оттука влогот изнесува $V_{aq} = 4693$ денари. ♦

Забелешка 2. За задачите како последната најдобро е да се означат вложувањата на временска оска, заради полесно пресметување на периодите на вкаматување.

Задачи за самостојна работа

1. Колкав декурзивен шестмесечен влог треба да се уплаќа, за на крајот на седмата година да имаме 300000 денари, ако каматната стапка е:

а) 4% $p.a(d)$ со шестмесечно вкаматување;

б) 4% $p.a(a)$ со шестмесечно вкаматување?

2. По колку денари треба да вложуваме годишно антиципативно, во тек на 6 години, ако сакаме на крај на шестата година да имаме вкупно 71420 денари, заедно со камата пресметана за 5% $p.a(d)$? Вкаматувањето е годишно.

3. По колку денари тримесечно декурзивно треба да вложува лице од неговата 25-та до 40-тата година, за на крајот на 50-тата година да располага со 500000 денари? Каматната стапка е 6% $p.a(d)$, а вкаматувањето е тримесечно.

4. Две години и шест месеци, лице вложува постојан тримесечен антиципативен влог и на крајот на периодот располага со 50000 денари. Колкав е поединечниот влог ако каматната стапка е 6% $p.a(d)$ со тримесечно вкаматување?

5*. Лицето вложува од својата 35-та до 40-тата година, декурзивен шестмесечен влог. Која сума ја вложувало лицето, ако сака во 43-тата година на крај да подигне 16000 денари, а на крај на 47-та година да има вкупно 120000 денари? Каматната стапка е 8% $p.a(d)$, а вкаматувањето е шестмесечно.

8. 4. Пресметување на бројот на вложувања и последниот влог

Повикувајќи се на формулата за пресметување на крајната вредност на влогот, $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$ за антиципативните и $S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}$ за декурзивните влогови, доколку се познати крајната сума, поединечниот влог и каматната стапка, може да се пресмета бројот на вложувањата n. Имено, за антиципативните влогови важи:

$$\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{S_n}{Vr}$$

$$r^n - 1 = \frac{S_n(r - 1)}{Vr},$$

односно

$$r^n = \frac{S_n(r - 1)}{Vr} + 1.$$

Бројот на вложувањата n, може да се пресмета само доколку горното равенство се логаритмира. Тогаш, користејќи својства на логаритми добиваме:

$$\log r^n = \log\left(1+\frac{S_n(r-1)}{Vr}\right)$$

$$n \cdot \log r = \log\frac{Vr+S_n(r-1)}{Vr}$$

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Vr+S_n(r-1)}{Vr}}.$$

За полесно пресметување, наместо последната формула, може логаритмирањето да се изврши по замена на податоците во основната формула за крајната вредност на долгот.

Слично, за декурзивните влогови добиваме:

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{V+S_n(r-1)}{V}}.$$

Забелешка 1. За антиципативна каматна стапка, пресметките се вршат според соодветната формула за крајна вредност на влогови со антиципативно вкаматување.

1. Колку пати треба да се вложат по 10000 денари годишно, на почетокот на секоја година, со 6% $p.a(d)$ каматна стапка и годишно вкаматување, ако сакаме да располагаме со вкупно 46371 денари?

Влоговите се антиципативни. Декурзивниот каматен фактор е $r=1+\frac{6}{100}=1{,}06$. Тогаш,

$$1{,}06^n=\frac{46371(1{,}06-1)}{10000\cdot 1{,}06}+1=1{,}26248.$$

Логаритмирајќи со основа 10, добиваме $n\cdot\log 1{,}06=\log 1{,}26248$ и оттука $n=4$. Значи, треба да вложуваме 4 години, односно 4 пати. ♦

2. Колку полугодишни влогови по 35000 денари треба да се уплатат, со камата 6% $p.a(d)$ и полугодишно вкаматување, ако на денот на последната уплата ни требаат 401651 денари?

Да забележиме дека штом пресметувањето на крајната вредност е на денот на последната уплата, влоговите се декурзивни. Релативната каматна стапка е 3%, па $r=1{,}03$. Тогаш, $401651=35000\cdot\frac{1{,}03^n-1}{1{,}03-1}$, оттука $1{,}03^n=1{,}34427$ и добиваме $n=10$. Значи, треба да се уплатат 10 вложувања. ♦

3. Колку вкупно влогови треба да се уплатат, ако вложувањето е тримесечно декурзивно, со каматна стапка 8% $p.a(d)$ и тримесечно вкаматување, а при тоа влогот изнесува 10000 денари и потребни ни се 137200 денари?

За декурзивен влог важи $137200 = 10000 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, за $r = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$. Тогаш, $1{,}02^n = 1{,}2744$ и добиваме $n \approx 12$. Доколку одговорот беше точно 12, тогаш ќе беа потребни 12 вложувања, односно 3 години по 4 вложувања, но добиената вредност е приближна. Точната вредност е $n = 12{,}2446$. Ова покажува дека за да се постигне бараната сума потребни се повеќе од 12 вложувања. Тогаш 12 влога ќе бидат со познатиот износ од 10000 денари, а ќе треба да се вложи и нов тринаесетти влог кој ќе се разликува и ќе биде со помала вредност. **Последниот влог** е различен од останатите и се нарекува **остаток на влогот**. ♦

Ќе ја изведеме формулата за пресметување на вредноста на последниот влог. Нека се вложуваат вкупно n влогови, но $n-1$ влог се со иста вредност V, а последниот, n-тиот влог, со вредност $V_0 \neq V$. На временска оска (црт. 5) ќе ја опишеме ситуацијата со антиципативни влогови

Црт. 5

Тогаш, за декурзивен каматен фактор r добиваме:

$$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + V_0 r\,,$$

$$S_n = Vr^2\left(r^{n-2} + \ldots + r + 1\right) + V_0 r\,.$$

Користејќи збир на членови на геометриска прогресија, добиваме

$$S_n = Vr^2 \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} + V_0 r\,,$$

а оттука:

$$\boxed{V_0 = \frac{S_n}{r} - Vr\frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} = \frac{1}{r} S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}.$$

Забелешка 2. Доколку користиме i/i таблици, изразот $\frac{1}{r}$ одговара на дисконтниот фактор зададен со таблицата II_p^1, а изразот $\frac{r^n - r}{r - 1}$ е токму III_p^{n-1}. Тогаш, за последниот влог може да запишеме:

$$\boxed{V_0 = S_n \cdot \mathrm{II}_p^1 - V \cdot \mathrm{III}_p^{n-1}}.$$

Забелешка 3. Во задачи, за број на вложувања n се зема првиот поголем цел број од вредноста добиена при пресметување, се разбира кога n не е цел број. Тогаш, $V_0 < V$, $n-1$ влогови се со вредност V, а последниот со вредност V_0.

Во случај на декурзивни влогови, временската оска изгледа како на црт. 6.

Црт. 6

Тогаш,

$$S_n = Vr^{n-1} + Vr^{n-2} + \ldots + Vr + V_0,$$

па средувајќи го равенството по V_0 и со употреба на формулата за збир на членови на геометриска прогресија, добиваме:

$$\boxed{V_0 = S_n - Vr\frac{r^{n-1}-1}{r-1} = S_n - V\frac{r^n - r}{r-1}}.$$

Забелешка 4. Користејќи i/i таблици, може да запишеме:

$$\boxed{V_0 = S_n - V \cdot \mathrm{III}_p^{n-1}}.$$

Ова е формулата за пресметување на последниот влог, различен од останатите, при декурзивно вложување.

Забелешка 5. Доколку вкаматувањето е антиципативно, за последниот влог се добиваат следниве формули:

за антиципативни влогови

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{\rho}S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}},$$

и за декурзивни влогови

$$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}.$$

4. Колку вложувања од по 8000 денари семестрално се потребни, за на еден семестар по последниот влог, крајната вредност на влоговите да биде 60000 денари. Вкаматувањето е шестмесечно, со каматна стапка 10% $p.a(d)$.

Имаме $r = 1 + \frac{10}{2 \cdot 100} = 1{,}05$. Крајната вредност се пресметува шест месеци по последниот влог, значи влоговите се антиципативни и $60000 = 8000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1}$, односно $1{,}05^n = 1{,}35714$ и $n \approx 6{,}26$. Тогаш, ќе земеме $n = 7$, односно ќе извршиме уплата на 6 влога по 8000 денари, а последниот, седмиот влог, ќе го пресметаме посебно $V_0=\dfrac{60000}{1{,}05}-8000\dfrac{1{,}05^7-1{,}05}{1{,}05-1}=57143-57136=7$. Последниот влог изнесува 7 денари. ♦

Забелешка 6. Ако последниот влог го добиеме како негативна вредност, тоа значи дека во моментот на пресметување на крајната вредност на влогот, банката треба да му врати на штедачот толкав износ.

Задачи за самостојна работа

1. Колку полугодишни антиципативни влогови од 35000 денари треба да се уплатат, за на крај да имаме 512389 денари? Притоа вкаматувањето е полугодишно со каматна стапка:

а) 6% $p.a(d)$;　　　　　　　　б) 6% $p.a(a)$.

2. Колку пати треба да се вложи износ од 235000 денари, декурзивно тримесечно, ако на денот на последната уплата ни требаат 2245438 денари, под услов каматната стапка да е 6% $p.a(d)$ со тримесечно вкаматување?

3. Колку тримесечни антиципативни влогови по 1000 денари се потребни, за заедно со 6% $p.a(d)$ камата да добиеме крајна сума од 40000 денари? Вкаматувањето е тримесечно.

4. Колку изнесува последниот влог, ако на почетокот на секои два месеци вложуваме по 1000 денари и 2 месеци по последниот влог имаме 70000 денари? Каматната стапка е 12% $p.a(d)$, а вкаматувањето е на секои два месеци.

5*. Колку пати треба да се вложува на почетокот на секоја година по 2000 денари, ако четири години по последниот влог бидат подигнати 7000 денари, а шест години по последниот влог останале 80000 денари? Каматната стапка е 6% $p.a(d)$, а вкаматувањето годишно. (Внимавај, влогот е антиципативен, па сумата се пресметува една година по последниот влог.)

8. 5. Пресметување на каматната стапка при вложување

Од формулата за крајна вредност на антиципативен влог со декурзивно вкаматување, $S_n=Vr\dfrac{r^n-1}{r-1}$, доколку се познати вредностите за S_n и V, а не е познат каматниот фактор r, односно каматната стапка $p\%$ $p.a(d)$, се добива равенка

$$r^{n+1}-\left(\frac{S_n}{V}+1\right)r+\frac{S_n}{V}=0\,.$$

Ова е полиномна равенка по факторот r, која во општ случај е од степен повисок од 3, а за ваквите равенки не постои познат метод на решавање, освен во некои специјални случаи. Затоа, решавањето на равенката се сведува на познати нумерички методи. Но, овде целта не е да ги изучуваме нумеричките методи, туку во полза на практичните задачи, најлесно да ја определиме каматната стапка. За таа цел, пресметувањето на каматната стапка ќе го направиме според формулата која користи вредности на i/i таблиците. Така,

$$\boxed{S_n = V\cdot \mathrm{III}_p^n}.$$

1. Со која каматна стапка, антиципативен семестрален долг од 2000 денари ќе нарасне до крајот на шеснаесетата година на 125000 денари, ако притоа вкаматувањето е семестрално?

Во дадената задача важи $125000 = 2000\cdot \mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{n}$, притоа има вкупно $n=16\cdot 2=32$ уплати.

Во таблиците $\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{n}=\dfrac{125000}{2000}=62{,}5$, ја бараме вредноста $62{,}5$ за $n=32$.

Оваа вредност ја нема во таблицата, но има две приближни вредности $62{,}19536018<62{,}5<65{,}20952741$, првата одговара за каматна стапка $3{,}75\%$, а втората за 4%. За да се определи која каматна стапка помеѓу овие две соодветствува на $62{,}5$, потребно е да се изврши линеарна интерполација, која поедноставно ќе ја направиме откако податоците ќе ги внесеме во табела:

$\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$	$\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$
62,19536018	3,75	62,19536018	3,75
65,20952741	4	62,5	$\frac{p}{2}$

Од овде формираме пропорција:

$$(4-3{,}75):(65{,}20952741-62{,}19536018)=\left(\frac{p}{2}-3{,}75\right):(62{,}5-62{,}19536018),$$

односно $0{,}25:3{,}01416723=\left(\dfrac{p}{2}-3{,}75\right):0{,}30463982$. На овој начин го интерполираме интервалот на каматната сметка, на ист начин како што се однесуваат вредностите во табелата.

Тогаш, $\frac{p}{2}-3{,}75=\frac{0{,}30463982\cdot 0{,}25}{3{,}01416723}=0{,}025$, односно $p=7{,}55\%\ \ p.a(d)$.

Бидејќи користиме разлики на вредностите, најдобро е табелата да ја прошириме со уште една редица во која ќе ги запишеме и разликите.

Истата дискусија ќе ја спроведеме и за декурзивните влогови. Од крајната вредност на влоговите $S_n=V\frac{r^n-1}{r-1}$, со трансформација на изразот за каматниот фактор добиваме:

$$r^n-\frac{S_n}{V}r+\frac{S_n}{V}-1=0,$$

што е повторно полиномна равенка по r. Користејќи ја формулата за крајната вредност на влоговите преку вредности од i/i таблица, $\boxed{S_n=V\left(1+\text{III}_p^{n-1}\right)}$, добиваме $\text{III}_p^{n-1}=\frac{S_n}{V}-1=\frac{S_n-V}{V}$. Доколку вредноста $\frac{S_n-V}{V}$ се наоѓа во таблиците за позната вредност $n-1$, каматната стапка се чита директно, во спротивно ја добиваме со линеарна интерполација. ♦

2. Со која каматна стапка треба да се вложува декурзивно тримесечно, во текот на 5 години, по 2000 денари, за да крајната сума на влоговите биде 52000 денари, ако вкаматувањето е квартално?

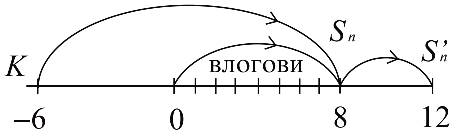
Разгледуваме декурзивен влог кој има вкупно 20 уплати, па $n=20$. Имаме $S_n=52000$, $V=2000$, а користиме $\frac{p}{4}$ каматна стапка. Тогаш $52000=2000\left(1+\text{III}_{\frac{p}{4}}^{19}\right)$ и оттука $\text{III}_{\frac{p}{4}}^{19}=25$. Во таблиците, во делот за бројот 19, не ја наоѓаме вредноста 25, но ги наоѓаме $24{,}54244$ во колоната за $2{,}5\%$ и $25{,}19739750$ во колоната за $2{,}75\%$. Ја составуваме табелата:

$\text{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p	$\text{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p
24,54244	2,5%	24,54244	2,5%
25,19740	2,75%	25	$\frac{p}{4}$
0,65496	0,25%	0,45756	$\frac{p}{4}-2{,}5$

Формираме пропорција $0{,}65496 : 0{,}25 = 0{,}45756 : \left(\frac{p}{4} - 2{,}5\right)$ и оттука добиваме $p = 10{,}7\%$.♦

3. Пред 6 години, лице вложило 30000 денари, а од денес па во наредните 8 години, на крајот на секоја година вложува по 5000 денари. На крајот на 8-та година од денес лицето ќе располага со 47745 денари. Со која сума ќе располага лицето по 12 години од денес ако се применува истата каматна стапка, при годишно вкаматување?

Временската оска ќе започне со -6, за да нулата одговара на моментот денес.



Црт. 7

Имаме $K = 30000$, $r = 1 + \frac{p}{100}$, $S_n = 47745$, $S_n = 5000\left(1 + \mathrm{III}_p^7\right)$.

Тогаш, $47745 = 5000\left(1 + \mathrm{III}_p^7\right)$, односно $\mathrm{III}_p^7 = 8{,}5491$, вредност која во таблицата за $n = 7$ се добива за $p = 5\%$. Сега, крајната сума од сите вложувања по 12 години од сега е $S'_n = Kr^{18} + S_n r^4 = 30000 \cdot 1{,}05^{18} + 47745 \cdot 1{,}05^4 = 130233$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Со која каматна стапка сме вложувале на почетокот на секое шестмесечје по 20000 денари, во текот на 2,5 години, ако на крајот на тој период располагаме со 112658 денари? Вкаматувањето е шестмесечно.

2. Во текот на четири години сме вложувале на секои четири месеци по 5000 денари, а на денот на последниот влог поседуваме 75000 денари. Со која декурзивна каматна стапка сме вложувале? Вложувањето е четиримесечно.

3. Со која каматна стапка треба да вложуваме годишно по 10000 денари, за по 20 години, при годишно капитализирање, да имаме 260000 денари, ако вложувањето е:

а) на почетокот; б) на крајот

на секоја година?

4. Со која каматна стапка, шестмесечен декурзивен влог од 3000 денари, на крајот на шеснаесетата година ќе нарасне на 188100, ако вкаматувањето е полугодишно?

5. Вложуваме тримесечен антиципативен влог од 5000 денари, кој на крајот на осмата година ќе нарасне на 312500 денари. Која е каматната стапка доколку вкаматувањето е тримесечно и декурзивно?

8. 6. Периодични примања (ренти)

На сличен начин како кај вложувањата, можеме да зборуваме за суми кои се примаат во одредени временски интервали. На пример, определена сума не се повлекува наеднаш, туку во определени суми, како помали износи во текот на зададен временски период, при што временските интервали меѓу две примања се еднакви. Доколку станува збор за примања на еднакви временски интервали, зборуваме за **ренти**. Овде ќе станува збор за еднакви ренти, односно **постојани ренти**. Бидејќи износот на рентите може да се менува според однапред определен закон, како на пример, по закон на геометриска или аритметичка прогресија, истите се нарекуваат **променливи ренти**. Може да се изврши поделба на рентите по повеќе основи. Па така, во однос на времето на исплатата, рентата може да се прима на почетокот на периодот - **антиципативна рента** или на крајот на периодот - **декурзивна рента**. Во однос на времетраењето на исплатите, рентата може да биде **времена** (во определен временски период), **доживотна** (до крајот на животот на лицето, но тогаш не зависи само од финансиски фактори) или пак **вечна**, доколку примањето на рентата не престанува никогаш.

Во однос на периодот за кој се исплаќа рентата, разликуваме годишна, полугодишна, тримесечна, месечна рента и слично.

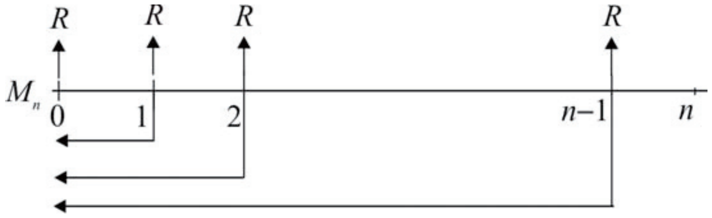
Додека трае примањето на рентата, вкаматувањето на средствата продолжува, па може периодите на примања и вкаматување да се совпаѓаат (ние ќе разгледуваме само вакви ренти), но може вкаматувањето да е почесто или поретко од примањето на рентата.

За примање рента, треба претходно да бидат обезбедени средства. Ваквата сума, вложена со цел да се обезбеди примање на рента се нарекува **миза**. Станува збор за еднократно уплаќање на средства. Но, можно е средствата да се обезбедат и со периодични уплати. Ако исплатата на рентата започнува веднаш по вложувањето на мизата, рентата се нарекува **непосредна**, а ако исплатата започнува по определен временски период по уплатата на мизата, рентата се нарекува **одложена рента**.

Ќе се задржиме на периодични исплати, со константен износ, кај кои вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата. Каматната стапка ќе биде декурзивна при изведувањето на формулите, но ќе дадеме и конкретни коментари за ситуациите со антиципативно вкаматување. Ќе ги користиме следниве ознаки: M_n - миза, R -рента, n -број на исплати, r -декурзивен каматен фактор, ρ -антиципативен каматен фактор.

8.6.1 Пресметување на мизата

Ќе разгледаме, за почеток, антиципативна рента со износ R, кој се прима n пати, на почетокот на секој период. За пресметување на потребната миза, треба да знаеме дека таа ги покрива сите ренти. Значи, слично како кај крајната вредност на влоговите, кога ги собиравме вкаматените вредности на секој поединечен влог, овде мизата се добива како сума на дисконтираните вредности на секоја поединечна рента. **Дисконтирана вредност** е всушност сегашната вредност која со вкаматување ја достигнува дадената рента R. Претставено на временска оска, тоа би изгледало на следниот начин (црт. 8):



Црт. 8

Тогаш, во антиципативен случај при каматен фактор r, за мизата добиваме:

$$M_n = R + R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots + R\cdot\frac{1}{r^{n-1}}.$$

Имено, првата рента не се дисконтира, таа е со исплата во сегашен момент, втората се дисконтира за еден период и така натаму до последната рента која се дисконтира за $n-1$ период. Ако го средиме изразот, добиваме:

$$M_n = R\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

каде збирот во заградата е збир на n членови на геометриска прогресија, со прв член 1, количник $\frac{1}{r}$. За разлика од влоговите, овде наместо каматните фактори, фигурираат **дисконтните фактори** $\frac{1}{r^k}$. Имаме $M_n = R\cdot\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = R\frac{r\left(r^n-1\right)}{r^n\left(r-1\right)}$. Тогаш, со формулата $\boxed{M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}}$ се пресметува мизата за антиципативна рента, поинаку наречена сегашна вредност на сите идни исплати.

Забелешка 1. Слично како што третата i/i таблица се добива како збир на вредностите од првата таблица, така и четвртата i/i таблица $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, се добива како збир во облик $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \ldots + \dfrac{1}{r^{n-1}}$, односно $\mathrm{I}V_p^{n-1} = \mathrm{II}_p^1 + \mathrm{II}_p^2 + \ldots + \mathrm{II}_p^{n-1}$, што е збирот на вредностите на втората таблица за иста каматна стапка $p\%\ p.a.(d)$ и за периоди од 1 до $n-1$.

Оттука за мизата ја добиваме формулата:

$$\boxed{M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)}.$$

1. Колкава сума треба да се вложи денес, за да следните 4 години примаме рента, на почетокот на секоја година, од 10000 денари? Каматната стапка е 6% $p.a(d)$, а вкаматувањето годишно.

Треба да се пресмета миза, ако знаеме дека имаме вкупно 4 ренти за примање, $n = 4$, со рента $R = 10000$, со годишно вкаматување, $m = 1$ и декурзивен каматен фактор $1 + \dfrac{6}{100} = 1{,}06$.

Тогаш

$$M_n = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = 10000 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06^3(1{,}06 - 1)} = 36730 \text{ денари.} \ \blacklozenge$$

Забелешка 2. Доколку вкаматувањето е антиципативно, тогаш каматниот фактор е $\rho = \dfrac{100}{100 - p}$, а за мизата важи:

$$\boxed{M_n = R\frac{\rho(\rho^n - 1)}{\rho^n(\rho - 1)} = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)}}.$$

2 Колкава сума треба да се вложи денес, за да следните 4 години примаме антиципативна рента од 10000 денари? Каматната стапка е 6% $p.a(a)$, а вкаматувањето годишно.

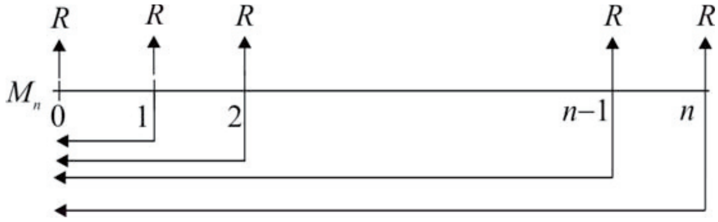
Слично како во задача 1, но со каматен фактор $\rho = \dfrac{100}{100 - 6} = 1{,}063829787$ со замена во соодветната формула добиваме миза $M_n = 36542$ денари. ♦

3. Колкава миза треба да се уплати за да во текот на 10 години примаме полугодишна рента од 30000 денари, ако првата рента се исплаќа веднаш? Каматната стапка е 10% $p.a(d)$ со полугодишно вкаматување.

Штом првата исплата е веднаш, се работи за антиципативна рента. Бројот на исплати е $n = 10 \cdot 2 = 20$, $R = 30000$, а $r = 1 + \frac{10}{2 \cdot 100} = 1{,}05$. Тогаш,

$$M_n = 30000 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05^{19}(1{,}05 - 1)} = 392560 \text{ денари.} \ \blacklozenge$$

Во случај на декурзивна рента во износ R, која се прима n пати, со декурзивен каматен фактор r имаме (црт. 9):



Црт. 9

Првата рента се исплаќа на крајот на првиот период, па истата се дисконтира за еден период. Втората рента се дисконтира за два периоди, а последната за n периоди.

Тогаш, $M_n = R\frac{1}{r} + R\frac{1}{r^2} + \ldots + R\frac{1}{r^{n-1}} + R\frac{1}{r^n} = R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{1}{r^n}\right) = R\frac{1}{r}\frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}}$.

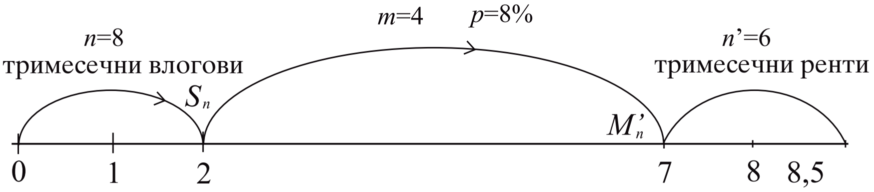
Сега, $\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ е формулата за пресметување на миза кај декурзивни ренти.

Забелешка 3. Според претходната дискусија за четвртата таблица i/i, формулата за мизата гласи $\boxed{M_n = R \cdot \mathrm{IV}_p^n}$.

Забелешка 4. При антиципативно вкаматување, формулата за мизата кај декурзивните ренти е $\boxed{M_n = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)}}$.

4. Започнуваме со уплата на периодичен влог во тек на 2 години, на крајот на секое тримесечје. Сакаме 7 години од денес, да почнеме да примаме тримесечна рента од 6000 денари, на почетокот на секој период, во текот на 1,5 години. Каматната стапка е 8% $p.a(d)$, а вкаматувањето е тримесечно. Колкав е периодичниот влог?

Да ги претставиме периодичните вложувања и примања на временска оска (црт. 10).



Црт. 10

Имаме $n=2\cdot 4=8$, $r=1+\dfrac{8}{4\cdot 100}=1{,}02$. За сумата на влоговите, на крајот на втората година важи $S_n=V\dfrac{r^n-1}{r-1}=\dfrac{1{,}02^8-1}{1{,}02-1}V=8{,}583V$. Крајната сума на влогот се вкаматува 5 години, до моментот кога ни треба мизата за исплата на рентите. Мизата е токму вкаматената вредност на S_n. Значи, $M'_n=S_n\cdot r^{5\cdot 4}=8{,}583V\cdot 1.02^{20}$, односно $M'_n=12{,}754V$, а од друга страна, според дадените услови, за рентите имаме $M'_n=R\cdot\dfrac{r^{n'}-1}{r^{n'-1}(r-1)}$, каде бројот на ренти е $n'=1{,}5\cdot 4=6$, $r=1{,}02$, $R=6000$ денари. Тогаш, $M'_n=6000\cdot\dfrac{1{,}02^6-1}{1{,}02^5(1{,}02-1)}=34281$ денари. Ако ги изедначиме двете добиени равенства за мизата, ќе го добиеме влогот, односно $34281=12{,}754V$ и оттука $V=2688$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Што претставуваат периодичните ренти?

2. Какви видови ренти разликуваме според времетраењето на исплатите?

3. Какви видови ренти разликуваме според времето на исплата?

4. Колкава миза е потребна за полугодишна антиципативна рента од 5000 денари, која се прима во траење од 20 години, ако каматната стапка е 6% $p.a(d)$, а вкаматувањето е полугодишно?

5. Колкав износ треба да се вложи денес, за во траење од 6 години да примаме годишна рента од 30000 денари, ако каматата е 4% $p.a(d)$, со годишно вкаматување, а рентата е:

а) декурзивна; б) антиципативна?

6. Колкава миза е потребна за во наредните 6 години да примаме декурзивна рента, на крајот на секое тримесечје, во износ од 30000 денари? Каматната стапка е 2% $p.s(d)$, а вкаматувањето е тримесечно?

7*. Денес се вложени 80000 денари. По колку треба да се вложува на крајот на секој месец наредните 9 години, ако сакаме на денот на последниот влог да почнеме со примање на месечна антиципативна рента од 7000 денари, во текот на 10 години? Каматната стапка е 12% $p.a(d)$, а вкаматувањето е месечно.

8*. Која сума требало да се вложи пред 2 години, за да заедно со денес вложените 18000 денари, се обезбеди миза за примање на месечна рента од 5000 денари, на крајот на секој месец почнувајќи од сега, па во наредните три години? Каматната стапка е 24% $p.a(d)$, а вкаматувањето е месечно.

8. 7. Пресметување на вредноста на рентата

Нека е позната вредноста на мизата M_n, условите на вкаматување и примање на рентата, а не е познат износот на рентата која ќе се прима. Доколку рентата е антиципативна, за мизата важи $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$. Ако непозната е величината R, изразувајќи од формулата, за неа добиваме:

$$\boxed{R = M_n \frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}},$$

што е формула за пресметување на рентата во антиципативен случај.

Доколку рентата е декурзивна, за мизата имаме $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, а оттука декурзивната рента која ќе се прима се добива според формулата:

$$\boxed{R = M_n \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}.$$

1. Денес се вложени 200000 денари со 6% $p.a(d)$ и семестрално вкаматување. Колкава семестрална рента ќе може да се прима во следните 20 години, ако рентата е:

а) декурзивна; б) антиципативна?

Мизата од $M_n = 200000$ денари треба да обезбеди исплата на вкупно $n = 20 \cdot 2 = 40$ ренти, со износ R. Декурзивниот каматен фактор е $r = 1 + \dfrac{6}{2 \cdot 100} = 1{,}03$.

а) Во случај на декурзивна рента, добиваме $R = 200000 \cdot \dfrac{1{,}03^{40}(1{,}03 - 1)}{1{,}03^{40} - 1} = 8652{,}5$ денари.

б) Сега, доколку рентата е антиципативна се добива

$$R = 200000 \cdot \frac{1{,}03^{39}\left(1{,}03-1\right)}{1{,}03^{40}-1} = 8400{,}5 \text{ денари. } \blacklozenge$$

Забелешка 1. Во случај вкаматувањето да е антиципативно, за антиципативната рента важи:

$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n-1}\left(\rho-1\right)}{\rho^n-1}},$$

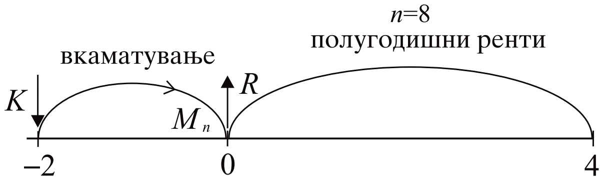
каде ρ е антиципативен каматен фактор.

Забелешка 2. Ако каматната стапка е антиципативна, за декурзивната рента се добива $\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n}\left(\rho-1\right)}{\rho^n-1}}$.

2. Ако сме уплатиле износ од 120000 денари пред две години со каматна стапка 5% $p.a(d)$ со семестрално вкаматување, тогаш колкава полугодишна рента може да примаме во тек на 4 години, на почетокот на секое полугодие, почнувајќи од денес?

Имаме $K = 120000$ $r = 1{,}025$, $n = 4 \cdot 2 = 8$. При овие услови, бидејќи рентата се прима на почеток на секое полугодие, од формулата за антиципативна рента се добива:

$$R = M_n \frac{r^{n-1}\left(r-1\right)}{r^n-1} = M_n \frac{1{,}025^7\left(1{,}025-1\right)}{1{,}025^8-1} = 0{,}136 M_n.$$

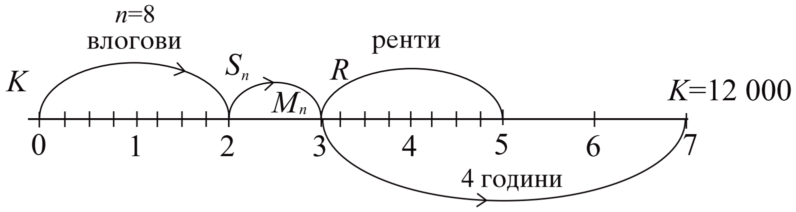


Црт. 11

На временска оска можеме да забележиме дека рентата е одложена за две години, па сумата од 120000 денари ќе се зголеми до моментот кога ќе се искористи како миза (црт. 11). Значи, $M_n = K \cdot r^{2\cdot 2} = 120000 \cdot 1{,}025^4 = 132457{,}5$ и $R = 0{,}136 \cdot 132457{,}5 = 18014$ денари. ♦

3. Од денес, па во наредните две години, вложуваме на крајот на секое тримесечје по 3000 денари. Колкава рента може да се обезбеди од овие влогови, ако треба да ја примаме во траење од 2 години со почеток една година по последниот влог, на почетокот на секое тримесечје, а притоа седум години од денес да ни останат 12000 денари? Каматната стапка е 8% $p.a(d)$, а вкаматувањето тримесечно.

Да ја нацртаме и означиме временската оска (црт. 12).



Црт. 12

$V_{dq} = 3000$, $n = 2 \cdot 4 = 8$, $r = 1 + \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$ и $S_n = V\dfrac{r^n - 1}{r - 1} = 3000 \cdot \dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 25749$ денари. Оваа сума се вкаматува една година и ги обезбедува рентите и дисконтираната вредност на остатокот од 12000 денари. Тогаш, можеме да запишеме равенка $S_n r^4 = M + 12000 \cdot \dfrac{1}{r^{4 \cdot 4}}$. Сумата 12000 денари ја дисконтираме за 4 години со по 4 периоди годишно. Тогаш $S_n r^{20} = Mr^{16} + 12000$. Ако мизата ја означиме со M, таа одговара на антиципативна тримесечна рента, која се исплаќа 8 пати, па имаме $M = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = R\dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02^7(1{,}02 - 1)} = R \cdot 7{,}472$. Со замена во горниот израз се добива $25749 \cdot 1{,}02^{20} = R \cdot 7{,}472 \cdot 1{,}02^{16} + 12000$, односно $R = \dfrac{25749 \cdot 1{,}02^{20} - 12000}{7{,}472 \cdot 1{,}02^{16}} = 2560$ денари.♦

Задачи за самостојна работа

1. Тукушто сме уплатиле миза од 100000 денари. Колкава декурзивна полугодишна рента во наредните 8 години можеме да примаме, ако каматната стапка е 3% $p.a(d)$ со полугодишно вкаматување? Колкава рента можеме да примаме, ако вкаматувањето е антиципативно со истата каматна стапка од 3% $p.a(a)$?

2. Ако денес се вложат 150000 денари, колкава рента може да примаме во наредните 2,5 години, на крајот на секое тримесечје со каматна стапка 8% $p.a(d)$ и тримесечно вкаматување?

3. Денес вложивме 90000 денари, а по три години ќе почнеме да примаме антиципативна тримесечна рента, во наредните пет години. Колкава е рентата, ако каматната стапка е 10% $p.a(d)$, а вкаматувањето тримесечно?

4*. Лице вложувало од својата 33-та година до својата 38-ма година, на почетокот на секое полугодие, по 4800 денари. Колкава декурзивна рента може да прима лицето на крајот на секое полугодие од својата 41-ва до својата 48-ма година? Каматната стапка е 6% $p.a(d)$ со полугодишно вкаматување.

5. Пред две години сме вложиле 12000 денари, а во наредните $2{,}5$ години треба да примаме рента на крајот на секое полугодие. Колкава е рентата, ако каматната стапка е 5% $p.a(d)$ со полугодишно вкаматување?

8. 8. Пресметување на бројот на ренти и рентниот остаток

Меѓу величините во формулата за пресметување на мизата, фигурира и бројот на ренти кои се примаат. Ако се познати мизата, рентата и каматната стапка, можеме да го изразиме бројот на ренти кои се примаат. За антиципативните ренти, според формулата за мизата имаме $M_n = R\dfrac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)} = Rr\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$. Ќе извршиме неколку еквивалентни трансформации на равенството:

$$\frac{M_n(r-1)}{Rr} = 1-\frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n} = 1-\frac{M_n(r-1)}{Rr} = \frac{Rr-M_n(r-1)}{Rr},$$

$$r^n = \frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}.$$

Добиеното равенство ќе го логаритмираме, $\log r^n = \log\dfrac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}$, а од својставата на логаритмите добиваме:

$$n\cdot\log r = \log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}.$$

Тогаш,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}}$$

е формулата за пресметување на бројот на рентите.

1. Депонирана е миза од 129442, со каматна стапка 4% $p.a(d)$ со семестрално вкаматување. Колку семестрални ренти по 12000 денари може да се исплатат, ако првата рента се прима веднаш?

Најпрво да забележиме дека штом првата рента се прима веднаш, се работи за антиципативни ренти. Знаеме дека $M_n = 129442$, $r = 1+\dfrac{4}{2\cdot 100} = 1{,}02$, $R = 12000$.

Тогаш за бројот на рентите имаме:

$$n=\frac{1}{\log 1{,}02}\cdot\log\frac{12000\cdot 1{,}02}{12000\cdot 1{,}02-129442\cdot(1{,}02-1)}=116{,}277\cdot\log 1{,}268241=12\,.\blacklozenge$$

Забелешка 1. Доколку каматната стапка е антиципативна, тогаш за антиципативен влог за бројот на рентите важи:

$$\boxed{n=\frac{1}{\log\rho}\cdot\log\frac{R\rho}{R\rho-M_n(\rho-1)}},$$

за $\rho=1+\dfrac{100}{100-p}$, антиципативен каматен фактор.

2. Денес вложуваме 140000 денари во штедилница која плаќа 5% $p.a(d)$ камата, со годишно капитализирање. Колку пати може да примаме антиципативна годишна рента од 10000 денари?

Имаме $M_n=140000$, $R=10000$ и $r=1+\dfrac{5}{100}=1{,}05$ и затоа

$$n=\frac{1}{\log 1{,}05}\cdot\log\frac{10000\cdot 1{,}05}{10000\cdot 1{,}05-140000(1{,}05-1)}=22{,}517\,.\blacklozenge$$

Добиената вредност не е цел број, Слично како кај влоговите, ова укажува дека со 22 исплатени ренти, мизата не е дотрошена, но не е можно ни да се исплатат 23 еднакви ренти по 10000 денари. Тогаш бројот на ренти е првиот природен број поголем од добиениот, но притоа 22 ренти се еднакви, а последната, 23-та е различна.

Црт. 13

Ќе ја изведеме формулата за **последната рента** или таканаречениот **рентен остаток**. Да ја означиме последната рента со R_0. Тогаш временската оска е дадена на црт. 13. Дисконтирајќи ги поединечните ренти, за мизата добиваме:

$$M_n=R+R\cdot\frac{1}{r}+R\cdot\frac{1}{r^2}+\ldots+R\cdot\frac{1}{r^{n-2}}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}=R\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-2}}\right)+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\,.$$

Изразот во заградата е збир на $n-1$ членови на геометриска прогресија, па оттаму:

$$M_n=R\cdot\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}=R\cdot\frac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\,.$$

Тогаш,

$$\boxed{R_0=\left[M_n-R\cdot\frac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)}\right]\cdot r^{n-1}}.$$

Забелешка 2. Последниот израз, запишан преку вредности од четвртата и првата i/i таблица, добива облик:

$$\boxed{R_0=\left[M_n-R\cdot\left(1+\mathrm{I}V_p^{n-2}\right)\right]\cdot\mathrm{I}_p^{n-1}},$$

каде $1+\mathrm{I}V_p^{n-2}=\dfrac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)}$.

Во нашиот пример, каде $n=23$ имаме:

$$R_0=\left[140000-10000\cdot\frac{1{,}05\left(1{,}05^{22}-1\right)}{1{,}05^{22}(1{,}05-1)}\right]\cdot 1{,}05^{22}=5231{,}75 \text{ денари.}$$

Рентниот остаток секогаш е помал од износот на рентата.

Нека е дадена низа M_n, декурзивна рента R која се прима n пати, како и декурзивен каматен фактор r. Со трансформација на изразот за мизата добиваме:

$$\frac{M_n}{R}(r-1)=1-\frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n}=1-\frac{M_n}{R}(r-1)=\frac{R-M_n(r-1)}{R},$$

и оттука:

$$r^n=\frac{R}{R-M_n(r-1)}.$$

Со логаритмирање добиваме:

$$\log r^n=\log\frac{R}{R-M_n(r-1)},$$

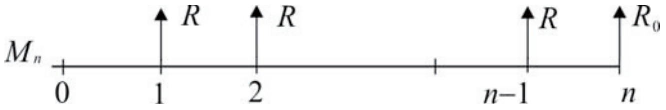
односно,

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{R}{R-M_n(r-1)}}.$$

Забелешка 3. Ако зададената каматна стапка е антиципативна, тогаш за бројот на рентите важи:

$$\boxed{n=\frac{1}{\log\rho}\cdot\log\frac{R}{R-M_n(\rho-1)}}.$$

Во ситуација кога n е цел број, тогаш тоа е бројот на рентите кои можат да се примаат, во спротивно за број на ренти го земаме првиот природен број, поголем од добиениот. Исто како кај антиципативните ренти, и овде може да се пресмета рентниот остаток R_0 (црт. 14).



Црт. 14

Дисконтирајќи ги рентите, за мизата добиваме:

$$M_n = R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots + R\cdot\frac{1}{r^{n-1}} + R_0\cdot\frac{1}{r^n} = R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) + R_0\cdot\frac{1}{r^n}.$$

Пресметувајќи го збирот во заградата како збир на геометриска прогресија со прв член $\frac{1}{r}$ и количник $\frac{1}{r}$, добиваме:

$$M_n = R\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}} + R_0\cdot\frac{1}{r^n} = R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)} + R_0\cdot\frac{1}{r^n}.$$

Тогаш,

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]\cdot r^n}$$

е формулата за пресметување на рентен остаток кај декурзивна рента.

Забелешка 4. Бидејќи изразот $\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ се заменува со $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, за рентниот остаток добиваме:

$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]\cdot \mathrm{I}_p^n}$, користејќи i/i таблици.

Забелешка 5. Од добиените формули за рентниот остаток, со замена на каматниот фактор r со антиципативниот ρ, ќе се добијат соодветните формули при антиципативно вкаматување.

3. Денес вложуваме 280000 денари како миза за годишна декурзивна рента од 20000 денари. Колку ренти можеме да примиме, ако каматната стапка е 5% $p.a(d)$ со годишно вкаматување? Колку изнесува последната рента?

Ги имаме следните податоци: миза $M_n = 280000$, рента $R = 20000$, $r = 1{,}05$, а сакаме да го определиме бројот на рентите n. Според изведената формула имаме:

$$n = \frac{1}{\log 1{,}05}\cdot\log\frac{20000}{20000 - 280000\cdot(1{,}05-1)} = 24{,}6765.$$

Тогаш бројот на ренти кои можат да се примат е $n = 25$, но првите 24 се со вредност 20000, а последната рента е различна и со вредност помала од 20000 денари. За рентниот остаток добиваме:

$$R_0 = \left[280000 - 20000 \cdot \frac{1{,}05^{24} - 1}{1{,}05^{24}(1{,}05 - 1)}\right] \cdot 1{,}05^{25} = 13637{,}4 \text{ денари.} \ ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Денес се вложени $910122{,}27$ денари, а од денес па натаму ќе примаме рента на крајот на секое тримесечје во износ од 100000 денари. Колку ренти можеме да примиме, ако каматната стапка е 7% $p.a(d)$, а вкаматувањето е тримесечно?

2. Колку полугодишни антиципативни ренти од 50000 денари можат да се исплатат ако денес е вложена миза од $339318{,}67$ денари? Каматната стапка е 10% $p.a(d)$, а вкаматувањето полугодишно.

3. Колку пати може да примаме семестрална декурзивна рента од 50000 денари, од денес па натаму, ако денес сме вложиле 500000 денари, со каматна стапка од 5% $p.a(d)$ и семестрално вкаматување? Колкав е рентниот остаток?

4. Колку пати можеме да примаме тримесечна декурзивна рента од 40000 денари на сметка на вложена миза од 1300000 денари? Каматната стапка е 9% $p.a(d)$, вкаматувањето тримесечно. Колкав е рентниот остаток?

5. Денес сме вложиле 120000 денари и од денес почнуваме да примаме антиципативна полугодишна рента од 4800 денари, со каматна стапка 4% $p.a(d)$ и полугодишно вкаматување. Колку ренти можеме да примиме и колкав е рентниот остаток?

8. 9. Пресметување на каматната стапка кај периодичните ренти

Каматната стапка, кога се познати останатите величини од формулата за миза, $M_n = R(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1})$ за антиципативна рента и $M_n = R \cdot \mathrm{I}V_p^n$ за декурзивна рента, се пресметува како непозната големина.

1. Со која каматна стапка треба да вложиме 600000 денари, за да 25 години, при годишно вкаматување, примаме годишна антиципативна рента од 50000 денари?

Ќе ја развиеме на почеток основната формула за мизата кај антиципативна рента, со цел да дојдеме до вредноста на декурзивниот каматен фактор r,

$M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$, а со средување на изразот станува

$(M_n - R)r^n - M_n r^{n-1} + R = 0$.

Последната равенка е равенка по r, од степен најчесто поголем од 4, равенки за кои мора да се користат нумерички методи за решавање. Но, користејќи ја формулата $\boxed{M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)}$, читајќи од финансиски таблици за $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, лесно може да се одреди каматната стапка p, но доколку вредноста за $\mathrm{I}V_p^{n-1}$ не е во таблиците, се применува линеарната интерполација, како кај сложената каматна стапка и кај влоговите.

Конкретно, за задачата 1 имаме $M_n = 600000$, $R = 50000$, $n = 25$. Тогаш $600000 = 50000 \cdot \left(1 + \mathrm{I}V_p^{24}\right)$ и затоа $\mathrm{I}V_p^{24} = 11$. Во таблиците за $\mathrm{I}V_p^{24}$ не ја наоѓаме вредноста 11 за ниту една каматна стапка, но наоѓаме две најблиски вредности, а тоа се $10{,}9830 < 11 < 11{,}4693$, при што $\mathrm{I}V_{7,5}^{24} = 10{,}9830$ и $\mathrm{I}V_7^{24} = 11{,}4693$. Ја составуваме табелата:

$\mathrm{I}V_p^{24}$	p	$\mathrm{I}V_p^{24}$	p
10,9830	7,5	10,9830	7,5
11,4693	7	11	p
0,4863	$-0{,}5$	0,017	$p - 7{,}5$

Од пропорцијата $0{,}4863 : (-0{,}5) = 0{,}017 : (p - 7{,}5)$ имаме $p = \dfrac{-0{,}5 \cdot 0{,}017}{0{,}4863} + 7{,}5 = 7{,}482\%$.

Бараната каматна стапка е $7{,}482\%$.♦

2. Лице примало рента од 60000 денари, на крајот на секое полугодие, во текот на 5 години. Која каматна стапка била применета, ако вкаматувањето е полугодишно, а шест месеци пред првата примена рента вложена е миза од 463302 денари?

Зборуваме за декурзивна рента во износ $R = 60000$, со миза $M_n = 463302$, која се примала $n = 5 \cdot 2 = 10$ пати. Според формулата за миза кај декурзивната рента имаме $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$. Ако го трансформираме равенството по декурзивниот каматен фактор r, добиваме равенка $M_n r^{n+1} - (M_n + R)r^n + R = 0$. Во нашиот пример, оваа равенка е од 11 степен, за која нема едноставен начин на решавање. Затоа ја користиме формулата за мизата преку финансиските таблици $M_n = R \cdot \mathrm{I}V^{n}_{\frac{p}{2}}$, $\frac{p}{2}$ е релативната каматна стапка за едно полугодие. Значи, $463302 = 60000 \cdot \mathrm{I}V^{10}_{\frac{p}{2}}$ и оттука $\mathrm{I}V^{10}_{\frac{p}{2}} = 7{,}7217$. Во таблиците, за $n = 10$ бројот $7{,}7217$ се наоѓа за $\frac{p}{2} = 5\%$. Тогаш номиналната годишна каматна стапка е 10% $p.a(d)$.♦

3. Со која каматна стапка треба да вложиме 120000 денари, за да во текот на 12 години и 6 месеци, при полугодишно капитализирање, примаме полугодишна декурзивна рента од 10000 денари?

Заменувајќи во формулата $M_n = 120000$, $R = 10000$ и бројот на ренти $n = 12{,}5 \cdot 2 = 25$, добиваме $120000 = 10000 \cdot \mathrm{I}V^{25}_{\frac{p}{2}}$, односно $\mathrm{I}V^{25}_{\frac{p}{2}} = 12$. Во четвртата таблица i/i, за $n = 25$ не го наоѓаме бројот 12, но наоѓаме други два броја меѓу кои е сместен 12, а тоа се $12{,}1979$ за каматна стапка од $6{,}5\%$ и $11{,}6536$ за каматна стапка од 7%.

Ќе ги внесеме податоците во табела и ќе интерполираме.

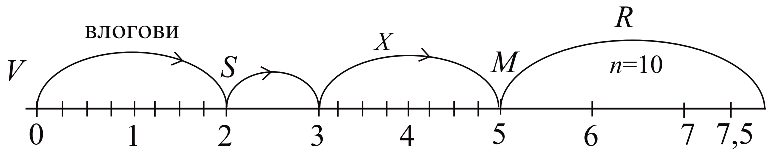
$\mathrm{I}V^{25}_{p/2}$	$p/2$	$\mathrm{I}V^{25}_{p/2}$	$p/2$
11,6536	7	11,6536	7
12,1979	6,5	12	$p/2$
0,5443	$-0{,}5$	0,3464	$p/2-7$

Од $0{,}5443 : (-0{,}5) = 0{,}3464 : (p/2 - 7{,}5)$ добиваме $\frac{p}{2} = \frac{-0{,}5 \cdot 0{,}3464}{0{,}5443} + 7 = 6{,}682\%$.

Номиналната годишна каматна стапка е $13{,}364\%$ $p.a(d)$. ♦

4. Од денес па во текот на две години, вложуваме по 16000 денари на крајот на секое тримесечје. По три години од денес треба да повлечеме извесна сума, но само толку колку за да по пет години имаме миза од 30840 денари. Мизата ќе ја искористиме за да во текот на $2{,}5$ години примаме рента од 4000 денари, декурзивно тримесечно. Која сума треба да ја повлечеме по три години од денес? Каматната стапка е иста за целиот временски период.

Двегодишно се вложува, а не можеме да пресметаме крајна сума на влогот затоа што каматната стапка не е позната. Но, имаме и податоци за рента од коишто можеме да ја добиеме каматната стапка. Ќе ги нанесеме податоците на временска оска и ќе ги поставиме равенките.



Црт. 15

Крајната сума на влогот S се вкаматува една година, се повлекуваат средства во износ X, и остатокот се вкаматува уште две години. Во моментот 5 години од денес, износот во банка одговара на мизата за рентата која следува. Значи, $\left(S\cdot r^{4}-X\right)\cdot r^{8}=M$. Да ја пресметаме прво каматната стапка. За мизата важи $M=R\cdot \mathrm{I}V_{\frac{p}{4}}^{n}$, каде n е бројот на рентите, а во овој случај тоа се вкупно $n=2{,}5\cdot 4=10$ ренти. Тогаш, $\mathrm{I}V_{\frac{p}{4}}^{n}=7{,}71$. Добиената вредност во таблицата одговара на каматна стапка $\frac{p}{4}=8\%$. Тогаш $p=32\%\quad p.a(d)$. Оттука, $r=1+\frac{32}{4\cdot 100}=1{,}08$ и може да замениме во равенката каде е непознатата сума X. Влогот е декурзивен и затоа $S=16000\frac{1{,}08^{8}-1}{1{,}08-1}=170186$ денари. Имаме $\left(170186\cdot 1{,}08^{4}-X\right)\cdot 1{,}08^{8}=30840$, од каде $231536-X=16662$, односно $X=231536-16662=214874$ денари.
Сумата која треба да ја повлечеме изнесува 214874 денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Во тек на десет години, на почетокот на секое тримесечје, сме примале рента од 10000 денари. Ако, на денот на првата примена рента сме вложиле 200000 денари, која каматна стапка со тримесечно вкаматување е применета?

2. Со која каматна стапка треба да се вложат 70000 денари за да може во тек на 12 години да примаме тримесечна антиципативна рента од 2000 денари? Вкаматувањето е тримесечно.

3. Со која каматна стапка треба да вложиме миза од 45216 денари, за да си обезбедиме во текот на шест години да примаме полугодишна декурзивна рента од 6000 денари при полугодишно вкаматување?

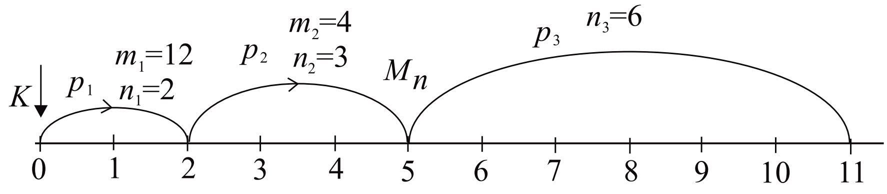
4. Лице вложило 36000 денари и во текот на пет години ќе прима четиримесечна антиципативна рента од 4500 денари. Која каматна стапка, со четиримесечно вкаматување е употребена?

5*. Која сума сме ја вложиле пред една година, ако денес имаме 45000 денари и почнуваме да примаме рента од 5000 денари на крајот на секои два месеци, со двомесечно вкаматување, со траење од 2 години?

8. 10. Комбинирани задачи *

Ќе се задржиме на неколку решени примери, во кои се употребуваат сите таблици i/i. Наведените примери се сложена комбинација од влогови, ренти и сложено вкаматување.

1. Колкав почетен капитал треба да уплатиме денес, за да почнувајќи пет години од денес и со траење од 6 години, примаме тримесечни антиципативни ренти од 9000 денари. Првите две години каматната стапка е 6% $p.s(d)$ со месечно вкаматување, наредните три години е 10% $p.a(a)$ со квартално вкаматување, а последните шест години каматната стапка е 4% $p.q(d)$ (црт. 15).



Црт. 16

Мизата за рентата е токму вкаматената вредност на почетниот капитал. За различни периоди има различни каматни фактори и тоа:

- првите две години вкаматуваме $2 \cdot 12 = 24$ пати со $r = 1 + \dfrac{2 \cdot 6}{12 \cdot 100} = 1{,}01$,

- следните три години, вкаматуваме $3 \cdot 4 = 12$ пати со $\rho = \dfrac{100}{100 - \dfrac{10}{4}} = 1{,}02564$,

- во пресметките за рентата примаме вкупно $6 \cdot 4 = 24$ ренти, со релативна тримесечна каматна стапка од 4%, односно со $r' = 1{,}04$.

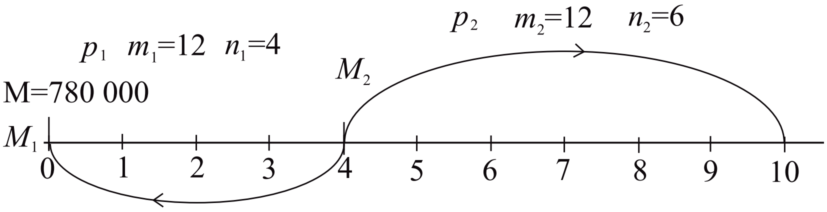
Тогаш, $K \cdot r^{24} \cdot \rho^{12} = M_n$, а $M_n = R \cdot r' \dfrac{r'^{24} - 1}{r'^{24}(r' - 1)}$. Заменувајќи ги познатите вредности и изедначувајќи ги двата изрази добиваме равенка:

$$K \cdot 1{,}01^{24} \cdot 1{,}02564^{12} = 9000 \cdot 1{,}04 \frac{1{,}04^{24} - 1}{1{,}04^{24}(1{,}04 - 1)},$$

односно $1{,}72K = 142712$, од каде за сумата која треба да се уплати денес, добиваме $K = 82972$.♦

2. Во банка уплаќаме миза во износ 780000 денари. Колкава месечна рента можеме да примаме во тек на 10 години, ако каматната стапка, по договор е 6% $p.a(d)$ во тек на првите 4 години и 8% $p.a(d)$ во следните 6 години? Капитализирањето е месечно, а првата рента се прима еден месец по уплатата на мизата.

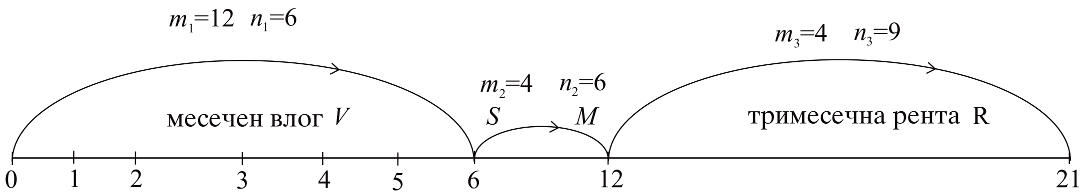
Прво ќе забележиме дека станува збор за декурзивна рента, имајќи предвид дека првата исплата е на крајот на месецот. Заради различните каматни стапки, може да сметаме дека првите 4 години се исплаќа една, а потоа 6 години друга рента, со исти износи, но со различни мизи (црт. 17).



Црт. 17

Потребната миза за првите 4 години е M_1, а за следните 6 години е M_2. Мизата која е уплатена е збир на M_1 и дисконтираната вредност на M_2. Притоа, првата рента се исплаќа $4 \cdot 12 = 48$ пати, со декурзивен каматен фактор $r_1 = 1 + \frac{6}{12 \cdot 100} = 1{,}005$ и мизата изнесува $M_1 = R \cdot \frac{1{,}005^{48} - 1}{1{,}005^{48}(1{,}005 - 1)} = 42{,}580R$. Втората рента се исплаќа $6 \cdot 12 = 72$ пати, со декурзивен каматен фактор $r_2 = 1 + \frac{8}{12 \cdot 100} = 1{,}00667$ па мизата е $M_2 = R \cdot \frac{1{,}00667^{72} - 1}{1{,}00667^{72}(1{,}00667 - 1)} = 57{,}028R$. Тогаш, $M = M_1 + M_2 \cdot \frac{1}{r_1^{4 \cdot 12}}$, односно $780000 = 42{,}580R + 57{,}028R \cdot 1{,}005^{-48}$, од каде што за вредноста на месечната рента имаме $R = 8917$ денари. ♦

3. Колкав месечен влог треба да се уплати во тек на 6 години, на почетокот на секој месец, ако сакаме во тек на 9 години да примаме тримесечна рента во износ од 18000 денари? Помеѓу последниот влог и првата рента ќе изминат 6 години и 1 месец. Каматната стапка е 8% $p.a(d)$, а вкаматувањето е месечно во тек на првите 6 години, а потоа тримесечно (црт. 18).



Црт. 18

Не е познат износот на поединечниот влог V. Влогот се уплаќа вкупно $6 \cdot 12 = 72$ пати, антиципативно. На крајот на шестата година се пресметува крајната сума на влогот S, со каматен фактор $r_1 = 1 + \frac{8}{12 \cdot 100} = 1{,}00667$. Тогаш,

$$S = V \cdot r_1 \frac{r_1^{72} - 1}{r_1 - 1} = V \cdot 1{,}00667 \frac{1{,}00667^{72} - 1}{1{,}00667 - 1} = 92{,}65V\,.$$

Сумата S се вкаматува од моментот кога ја претставува мизата. Меѓу последниот влог и исплатата на рентата минуваат 6 години и 1 месец, но S се пресметува еден месец по последниот влог. Значи, останува да се вкамати 6 години. Тогаш $M = S \cdot r_2^{6 \cdot 4}$, затоа што по пресметувањето на сумата S вкаматувањето е тримесечно. Тогаш, за каматниот фактор r_2 добиваме $r_2 = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$. Значи, за мизата важи

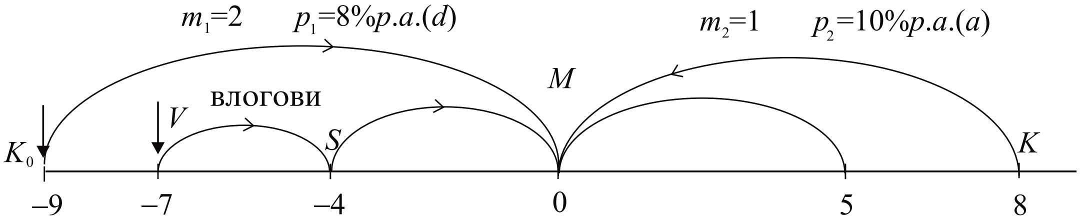
$$M = S \cdot 1{,}02^{24} = 92{,}65 \cdot 1{,}02^{24} V = 149V\,.$$

Од друга страна, мизата ќе ја пресметаме преку условите за рентата. Рентата се прима 9 години, на три месеци. Значи, вкупно $n = 9 \cdot 4 = 36$ ренти кои се исплаќаат со почеток на првото тримесечје, значи се антиципативни. Каматниот фактор е $r_2 = 1{,}02$. Тогаш,

$$M = R \cdot r_2 \frac{r_2^{36} - 1}{r_2^{36}(r_2 - 1)} = 18000 \cdot 1{,}02 \frac{1{,}02^{36} - 1}{1{,}02^{36}(1{,}02 - 1)} = 18000 \cdot 26 = 468000\,.$$

Изедначувајќи ги двете вредности за мизата, добиваме $149V = 468000$, па за влогот се добива $V = 3141$ денари. ♦

4. Пред девет години лице уплатило во банка 38000 денари. Првите две години немало ни уплати ни исплати. Потоа, во текот на 3 години, се вложувало влогови од 8000 денари на секои 6 месеци. Почнувајќи од денес, во наредните 5 години ќе примаме годишна рента од 15000 денари. Колку средства ќе имаме на 4 години по последната рента, ако до денес важела каматна стапка од 8% $p.a(d)$ со полугодишно вкаматување, а од денес 10% $p.a(a)$ со годишно вкаматување. И влогот и рентите се антиципативни (црт. 19).



Црт. 19

Ќе ги изедначиме вкаматените вредности на уплатите денес со потребната миза и дисконтираниот остаток K. Каматниот фактор до денес е $r_1 = 1 + \frac{8}{2 \cdot 100} = 1{,}04$. Првата вложена сума $K_0 = 38000$ денари се вкаматува до денес, полугодишно, значи вкупно $9 \cdot 2 = 18$ пати. Вкупната сума на влогот, кој се вложува вкупно $3 \cdot 2 = 6$ пати е $S = V \cdot r_1 \frac{r_1^6 - 1}{r_1 - 1} = 8000 \cdot 1{,}04 \frac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04 - 1} = 55186$ денари, а оваа сума се вкаматува до денес, па вкупниот износ на средствата до денес е

$K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^{4 \cdot 2} = 38000 \cdot 1{,}04^{18} + 55186 \cdot 1{,}04^8 = 152507$ денари.

За идните исплати потрбни се пресметка за мизата и дисконтираната вредност на остатокот. Да забележиме дека се бара остатокот 4 години по последната рента, која е антиципативна годишно, што значи на 4 години од сега е последната рента, а на 8 години од сега го пресметуваме остатокот. Тогаш дисконтираната вредност на остатокот K е $K \cdot \frac{1}{\rho_2^8}$, каде антиципативниот каматен фактор е $\rho_2 = \frac{100}{100 - 10} = 1{,}11$.

За мизата важи $M = R \cdot \rho_2 \cdot \frac{\rho_2^5 - 1}{\rho_2^5 (\rho_2 - 1)}$, за петгодишна антиципативна рента со годишна исплата во износ од 15000 денари. Тогаш

$M = 15000 \cdot 1{,}11 \cdot \frac{1{,}11^5 - 1}{1{,}11^5 (1{,}11 - 1)} = 61537$ денари.

Изедначувајќи ги сегашните вредности на сите уплати и исплати, $K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^8 = M + K \cdot \frac{1}{\rho_2^8}$, добиваме дека $152507 = 61537 + K \cdot 1{,}11^{-8}$ и оттука $K = 39474$ денари. На сметка, на крајот на осмата година од сега, ни остануваат 39474 денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1*. Пред 11 години сме почнале со вложување на полугодишен влог од 8000 денари во текот на 4 години. Пред 3 години сме вложиле и 90000 денари еднократно. Од денес примаме месечна рента во тек на 7 години, така што 49 месеци по последната рента ни остануваат уште 50000 денари. Колкава е рентата, ако каматната стапка е 8% $p.a(d)$ со полугодишно капитализирање до денес, а 12% $p.a(d)$ со месечно капитализирање од денес па натаму? И рентите и влоговите се антиципативни.

2*. Пред 12 години сме вложиле некој износ во банка. Три години потоа сме почнале да вложуваме полугодишни влогови од 3000 денари во рок од 5 години. Од денес примаме полугодишна рента од 5000 денари, во траење од 8 години. Една година и 6 месеци по последната рента во банка имаме уште 4000 денари. Колкав износ сме уплатиле пред 12 години, ако каматната стапка до денес е 8% $p.a(a)$, а од денес $p=6\%$ $p.a(d)$, со полугодишно вкаматување. И влоговите и рентите се антиципативни.

3*. Од пред три години, со траење од 2 години, вложувавме месечно антиципативно по 2000 денари. Пред една година сме вложиле уште 40000 денари. Една година од сега, со траење од 5 години, примаме месечна антиципативна рента во износ R, а шест години од сега, во траење од една година, ќе примаме месечна антиципативна рента од 2200 денари. Ако каматната стапка е 13% $p.a(d)$, колкава е петгодишната рента? Вкаматувањето е месечно.

4*. Едно лице, од пред 30 години па до пред 10 години, вложувало на почетокот на секој месец по 1100 денари, со каматна стапка $24\% p.a.(d)$ и месечно вкаматување. Оттогаш па наваму, каматната стапка е $4\% p.a.(d)$ со полугодишно вкаматување. Колкава полугодишна антиципативна рента може да прима лицето, почнувајќи од денес, па во наредните 15 години и на денот на последната исплата да му останат уште 50000 денари.

5*. Едно лице вложувало, од својата седма до својата петнаесетта година, на почетокот на секое тримесечие по 7000 денари. Во дваесеттата година вложило уште 200000 денари. Колку средства ќе му останат на лицето во неговата педесетта година, ако во периодот меѓу триесеттата и четириесеттата година примало рента од 125000 денари, на почетокот на секое тримесечје. Каматната стапка е $8\% p.a.(d)$ со тримесечно вкаматување.

8. 11. Задачи за вежбање

1. Од денес, па во текот на една година и осум месеци, ќе вложуваме по 1200 денари на почетокот на секој месец. Со која сума ќе располагаме три години од денес, ако каматната стапка е 6% $p.a(d)$, а вкаматувањето е месечно?

2. Пред две години во банка сме вложиле 40000 денари. Колкав влог треба да уплаќаме во наредните три години на крајот на секој месец, ако имаме потреба по 4 години од сега, од 800000 денари? Каматната стапка е 18% $p.a(d)$, а вкаматувањето месечно.

3. Колку тримесечни влогови од 4500 денари треба да уплатиме, за три месеци по последниот влог да располагаме со 120000 денари? Каматната стапка е 10%, а вкаматувањето тримесечно.

4. Лице вложувало по 6000 денари на крајот на секој семестар, од својата 35-та до својата 41-ва година, за да на денот на последниот влог има 144000 денари. Со која каматна стапка е извршено вложувањето, ако вкаматувањето е семестрално?

5. Колку години, заклучно со денес, лице вложувало тримесечни антиципативни влогови од 6000 денари, за да четири години од денес располага со 314422 денари? Каматната стапка е 6% $p.a(d)$, а вкаматувањето тримесечно.

6. Која сума треба да се вложи денес ако сакаме 20 години да примаме квартална декурзивна рента од 7200 денари? Каматната стапка е 8% $p.a(d)$, а вкаматувањето е тримесечно.

7. Од денес па во наредните две години, вложуваме на крајот на секој месец по 2500 денари. Колкава рента ќе примаме на почетокот на секој месец, во тек на две години, почнувајќи 4 години од сега? Каматната стапка е 12% $p.a(d)$, а вкаматувањето месечно.

8. Колку пати може да примаме семестрална антиципативна рента од 10000 денари, од денес па натаму, ако денес сме вложиле 100000 денари? Каматната стапка е 5% $p.a(d)$, а вкаматувањето семестрално. Колкав е рентниот остаток?

9. Денес сме вложиле 115610 денари, а по еден месец почнуваме да примаме рента од 9000 денари, на крајот на секој месец во тек на наредните две години. Колкава е каматната стапка, ако вкаматувањето е месечно?

10. Која сума треба да ја вложиме денес, за да по пет години располагаме со 59008 денари, кои ќе ги искористиме како миза за декурзивна тримесечна рента од 12000 денари, во траење од 3 години, при тримесечно вкаматување?

11*. Пред 10 години во банка сме уплатиле 50000 денари. Четири години подоцна, почнуваме со периодични вложувања од 800 денари на почеток на секој месец, во траење од 6 години. Денес ја примаме првата месечна рента од 3000 денари и ја примаме 2 години, на почетокот на секој месец. Половина година по последната рента, подигаме уште 197650 денари. Колку средства ни остануваат 3 години од денес, ако каматната стапка е 10% $p.a(d)$ со месечно вкаматување?

12*. Родител вложувал на штедната книшка на своето дете на крајот на секој месец по 500 денари, од неговата 8-ма до неговата 15-та година, а од 18-тата до 24-тата година по 600 денари на почетокот на секој месец. Потоа од 26-тата година па во тек на 1,5 година, родителот вложувал по 250 денари, антиципативно месечно. Колку средства ќе има детето, шест месеци по последниот влог, ако каматната стапка е 10% $p.a(d)$, со месечно вкаматување?

13. Пред 12 години е вложена некоја сума, а денес се подигнати 30000 денари. Од денес па во текот на наредните 6 години се вложуваат четиримесечно декурзивно по 500 денари. Каматната стапка е 6% $p.a(d)$, со четиримесечно вкаматување. Која сума е вложена пред 12 години, ако 12 години од сега на сметката има 208790 денари?

14. Пред неколку години па до денес, лице вложувало на почетокот на секое тримесечје по 12000 денари, а четири години од денес располага со 175400 денари. Каматната стапка е 12% $p.a(d)$, а вкаматувањето тримесечно. Пред колку години започнало вложувањето?

15. Лице вложува 80000 денари. Колкава рента може да прима на почетокот на секое тримесечие, почнувајќи 2,5 години од сега со траење 2,5 години? Каматната стапка е 12% $p.a(d)$, со тримесечно вкаматување.

16*. Која сума треба да се вложи година и три месеци од денес, ако сакаме од вложувањето па до 3 години од денес да примаме, месечно декурзивно, рента од 4500 денари, а на денот на последната рента да останат уште 11250 денари? Каматната стапка е 12% $p.a(d)$, а вкаматувањето месечно.

17*. Пред 5 години, лице вложило 24000 денари, а од денес во наредните две години, вложува по 38330 денари, антиципативно шестмесечно. Со која сума ќе располага лицето 5 години од сега, ако каматната стапка е еднаква за целото време, со полугодишно вкаматување, а на денот на последниот влог лицето располага со 400000 денари?

18*. Денес се вложени 150000 денари, а по две години ќе подигнеме 60000 денари. Од петтата па до десеттата година од денес, ќе примаме декурзивна годишна рента, а три години по последната рента, на сметката ќе останат уште 30000 денари. Колкава е рентата, доколку каматната стапка е 5% $p.a(d)$, а вкаматувањето е годишно?

Тематски преглед

При примената на простата и сложената каматна сметка разгледуваме суми кои еднократно се вложуваат, како и примери во кои суми се вложуваат или повлекуваат во различни периоди. Притоа, поединечните вложувања може да бидат еднакви, но и различни, да се менуваат по одреден закон, на пример да растат или опаѓаат по закон на аритметичка или геометриска прогресија, или пак, како кај штедењето, да се менуваат без однапред утврден закон. Но, често пати се случува вложувањата да се повторуваат во еднакви временски интервали. Кога повеќе пати се вложува ист износ, во исти временски периоди и се вкаматува со иста каматна стапка, зборуваме за **влогови**, кои заради истиот износ кој се вложува се нарекуваат уште и постојани влогови.

Во зависност од тоа дали вложувањето (уплатата на влогот) е на почетокот или на крајот на временскиот интервал, разликуваме **антиципативни** односно **декурзивни влогови**. При вложувањето, секој поединечен влог се вкаматува од моментот на вложување, до моментот на пресметувањето на крајната вредност на влоговите. Може да се користи и декурзивно и антиципативно вкаматување. Притоа може поединечните вложувања да се совпаѓаат со вкаматувањето, но може да бидат поретки или почести од вкаматувањето. Се поставува прашањето колкава е вкупната вредност од сите поединечни влогови. **Крајна вредност** на вложувањето се нарекува збирот на вкаматените поединечни влогови на крајот на периодот.

Ќе разгледуваме само поединечни периодични вложувања кај кои вложувањето се совпаѓа со вкаматувањето, при што влоговите се постојани (непроменливи) влогови.

Доколку во текот на годината се уплаќа еден влог, зборуваме за **годишен влог**, ако вложувањето е двапати годишно, влоговите се **шестмесечни** (**семестрални**), за вложување 4 пати годишно, односно на секои три месеци, влоговите се **тримесечни** (**квартални**). Ако вложувањето е еднаш месечно, тогаш влоговите се **месечни**. И овде вкаматувањето може да биде годишно, шестмесечно, тримесечно и така натаму.

Сумата на антиципативните вкаматени влогови се пресметува со

$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}}$ со декурзивно вкаматување,

$\boxed{S_n = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$ со антиципативно вкаматување.

Сумата на декурзивните вкаматени влогови се пресметува со

$\boxed{S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}}$ со декурзивно вкаматување,

$\boxed{S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$ со антиципативно вкаматување.

Вредноста на антиципативно вкаматен влог се пресметува со

$\boxed{V = S_n\frac{r-1}{r(r^n - 1)}}$ за декурзивно вкаматување,

$\boxed{V = S_n\frac{\rho-1}{\rho(\rho^n - 1)}}$ со антиципативно вкаматување.

Вредноста на декурзивно вкаматен влог се пресметува со

$\boxed{V = S_n\frac{\rho-1}{\rho^n - 1}}$ со антиципативно вкаматување,

$\boxed{V = S_n\frac{r-1}{r^n - 1}}$ за декурзивно вкаматување.

Бројот на вложувања за антиципативните влогови се пресметува со формулата

$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Vr + S_n(r-1)}{Vr}}$.

Бројот на вложувања за декурзивни влогови се пресметува со формулата

$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{V + S_n(r-1)}{V}}$.

Последниот влог е различен од останатите и се нарекува **остаток на влогот**.

Кај антиципативно вкаматување последниот влог се пресметува со формулата

$\boxed{V_0 = \frac{1}{\rho}S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$ за антиципативни влогови,

$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$ за декурзивни влогови.

Кај декурзивното вкаматување последниот влог се пресметува со формулите

$\boxed{V_0 = \frac{1}{r}S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}$ за антиципативни влогови,

$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}$ за декурзивни влогови.

Од формулата за крајна вредност на антиципативен влог со декурзивно вкаматување, $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$, доколку се познати вредностите за S_n и V, а не е познат каматниот фактор r, односно каматната стапка $p\%\ \ p.a(d)$, се добива равенка

$$\boxed{r^{n+1} - \left(\frac{S_n}{V} + 1\right)r + \frac{S_n}{V} = 0}.$$

Ова е полиномна равенка по факторот r, која во општ случај е од степен повисок од 3, а за ваквите равенки не постои познат метод на решавање, освен во некои специјални случаи. Затоа, решавањето на равенката се сведува на познати нумерички методи. Но, овде целта не е да ги изучуваме нумеричките методи, туку во полза на практичните задачи, најлесно да ја определиме каматната стапка. За таа цел, пресметувањето на каматната стапка го правиме според формулата која користи вредности на i/i таблиците. Така $S_n = V \cdot \mathrm{III}_p^n$.

Истата дискусија ја спроведуваме и за декурзивните влогови. Од крајната вредност на влоговите $S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}$, со трансформација на изразот за каматниот фактор добиваме,

$$\boxed{r^n - \frac{S_n}{V}r + \frac{S_n}{V} - 1 = 0},$$

што е повторно полиномна равенка по r. Користејќи ја формулата за крајната вредност на влоговите преку вредности од i/i таблица, $S_n = V\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)$, добиваме $\mathrm{III}_p^{n-1} = \frac{S_n}{V} - 1 = \frac{S_n - V}{V}$. Доколку вредноста $\frac{S_n - V}{V}$ се наоѓа во таблиците за позната вредност $n-1$, каматната стапка се чита директно, во спротивно ја добиваме со линеарна интерполација.

Примања на еднакви временски интервали се нарекуваат **ренти**. Рентите може да бидат **постојани** и **променливи** во зависност од тоа дали се еднакви или не временските интервали меѓу две примања. Во однос на времето на исплатата, рентата може да се прима на почетокот на периодот - **антиципативна рента** или на крајот на периодот - **декурзивна рента**. Во однос на времетраењето на исплатите, рентата може да биде **времена**, **доживотна** или **вечна**. Во однос на периодот за кој се исплаќа рентата, разликуваме **годишна**, **полугодишна**, **тримесечна**, **месечна рента** и слично.

За примање рента, треба претходно да бидат обезбедени средства. Ваквата сума, вложена со цел да се обезбеди примање на рента се нарекува **миза**. Станува збор за еднократно уплаќање на средства. Но, можно е средствата да се обезбедат и со периодични уплати. Ако исплатата на рентата започнува веднаш по вложувањето на мизата, рентата се нарекува **непосредна**, а ако исплатата започнува по определен временски период по уплатата на мизата, рентата се нарекува **одложена рента**.

Ние проучивме периодични исплати, со константен износ, кај кои вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата. Каматната стапка е декурзивна при изведувањето на формулите, но има случаи со антиципативно вкаматување. Ги користевме следниве ознаки: M_n-миза, R-рента, n-број на исплати, r-декурзивен каматен фактор, ρ-антиципативен каматен фактор.

Миза кај антиципативни ренти се пресметува по формулите

$\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}}$ со декурзивно вкаматување,

$\boxed{M_n = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}}$ со антиципативно вкаматување.

Миза кај декурзивните ренти се пресметува по формулите

$\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ со декурзивно вкаматување,

$\boxed{M_n = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho-1)}}$ со антиципативно вкаматување.

Ако е позната вредноста на мизата M_n, условите на вкаматување и примање на рентата, тогаш вредноста на рентата се пресметува по формулите

$\boxed{R = M_n\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}}$ за антиципативна рента со декурзивно вкаматување,

$\boxed{R = M_n\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}$ за декурзивната рента со декурзивно вкаматување,

$\boxed{R = M_n\frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n - 1}}$ за антиципативната рента со антиципативно вкаматување,

$\boxed{R = M_n\frac{\rho^n(\rho-1)}{\rho^n - 1}}$ за декурзивната рента со антиципативно вкаматување.

Ако се познати мизата, рентата и каматната стапка, тогаш на бројот на антиципативни ренти се пресметува по формулите

$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}}$ кај декурзивна каматна стапка и

$\boxed{n=\frac{1}{\log\rho}\cdot\log\frac{R\rho}{R\rho-M_n(\rho-1)}}$ кај антиципативна каматна стапка.

Ако се познати мизата, рентата и каматната стапка, тогаш на бројот на декурзивни ренти се пресметува по формулите

$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{R}{R-M_n(r-1)}}$ кај декурзивна каматна стапка и

$\boxed{n=\frac{1}{\log\rho}\cdot\log\frac{R}{R-M_n(\rho-1)}}$ кај антиципативна каматна стапка.

Последната рента, односно рентниот остаток кај декурзивна рента се пресметува со формулата

$$\boxed{R_0=\left[M_n-R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]\cdot r^n}.$$

Каматна стапка, кога се познати останатите величини од формулата за миза, $M_n=R\left(1+\mathrm{I}V_p^{n-1}\right)$ за антиципативна рента и $M_n=R\cdot\mathrm{I}V_p^n$ за декурзивна рента, се пресметува како непозната големина.

9. ЗАЕМИ

9. 1. Поим и видови заеми

При недостиг на финансиски средства, за да се покријат моменталните обврски, луѓето користат позајмени средства. Некогаш, и долгорочно, приходите, било на физичките, било правните лица, не се доволни за исполнување на планираните и инцидентните финансиски потреби. Во таква ситуација, се користат **заеми**, односно финансиски средства кои се позајмуваат при одредени услови. Давателот и барателот на заемот, се договараат околу износот на заемот, начинот на отплата, времето на отплата, каматната стапка која ќе се користи и сите други ситуации кои може да настанат, врзани за плаќањето.

Заемот претставува привремена услуга од страна на доверителот кон должникот, односно договор за отстапување на финансиски средства на корисник, кој истите може да ги користи и во определен рок да ги врати.

Во овој дел ќе стане збор за начинот на утврдување на обврските на барателот на заемот, вклучувајќи го вкаматувањето за времето за кое се користи заемот и нивното исполнување според условите дадени во договорот за заем. При тоа, заемот се одобрува еднократно во определен износ, а најчесто не се враќа наеднаш, туку во определени периоди, со одредени суми. Сумата со која се отплаќа заемот во секој период, се нарекува **отплата**, а отплатата, заедно со каматата за определениот период, се нарекува **ануитет**. Временски период, за кој се врши секоја поединечна отплатата на заемот е **период на амортизација**.

Според потребите, согласно со постоечките закони, низ текот на времето, постојат повеќе поделби на заемите:

- според времетраењето на отплата, заемите се делат на **краткорочни** (со рок на враќање од најмногу една година), **среднорочни** и **долгорочни**.
- според начинот на отплата, заемите се делат на **амортизациони** и **рентни**. Амортизационите заеми подразбираат враќање на заемот во определен временски период, со отплатување на каматата и дел од долгот. Рентните заеми подразбираат постојана отплата во вид на рента.
- според обезбедувањето со гаранција, постојат **лични** и **реални** заеми. Личните заеми се даваат без гаранција, врз основа на довербата која ја има барателот на заемот кај давателот. Реалните заеми се даваат врз основа на соодветно покритие, како што се на пример хипотеките.
- според давателот на заемот, разликуваме **домашни** или **странски** заеми, **јавни** или **приватни**, **банкарски** или **небанкарски** и слично.
- според тоа дали за заемот се плаќа или не се плаќа камата, разликуваме **каматни** и **бескаматни** заеми.

• според начинот на издавање на документот за задолжување, заемите можат да бидат **облигациони** (еден документ за целиот износ) и **заеми поделени на обврзници** (со повеќе документи за повеќе доверители, со еднакви или различни вредности по доверител, но со вкупен износ колку што е целиот заем).

• според времето на исплата на ануитетите, разликуваме заеми **со декурзивни ануитети** (исплатата се врши декурзивно, на крајот на поединечните периоди на исплата) и **со антиципативни ануитети** (исплатата се врши антиципативно, на почетокот на периодот на исплата).

• според начинот на пресметување на каматата, разликуваме заеми **со декурзивно вкаматување** и **со антиципативно вкаматување**.

Слично како кај вложувањата и рентите, заемите можат да бидат со декурзивни ануитети и антиципативно вкаматување, со декурзивни ануитети и декурзивно вкаматување и на истиот начин за заемите со антиципативни ануитети, со декурзивно или антиципативно вкаматување.

Амортизација на заемите може да се врши на различни начини, може во определени периоди да се плаќа само камата за средствата за поминатото време, а при доспевање на долгот да се исплати целиот долг, или пак, на секој период на амортизација да се плаќа сума која е збир од пресметаната камата и дел од заемот.

Исто така, да забележиме дека **амортизацијата на заемот**, како што се нарекува постепеното отплатување на заемот според однапред определени износи, во определени временски интервали, се реализира по однапред утврден план кој се нарекува **амортизационен план**. Но, за да се изработи амортизационен план, во кој точно се гледа, во кој момент колку треба да се плати, колку преостанува од долгот и колкава камата е пресметана, потребно е да видиме како секоја од поединечните величини се пресметува.

Притоа, и отплатите и ануитетите можат да бидат постојани или пак да се менуваат по определено правило, на пример, аритметичка или геометриска прогресија. Нас нѐ интересираат заемите со постојани ануитети, затоа што тие се почести и поедноставни и за барателот, бидејќи го распределуваат долгот рамномерно на целиот период. Доколку заемот е со еднакви отплати, за барателот е неповолно затоа што во времето во кое се подига заемот, барателот е оптеретен со голем ануитет. Исто така, може пресметувањето на каматата да се совпаѓа или да не се совпаѓа со периодот на плаќање на ануитетот.

Овде ќе разгледаме заеми со еднакви ануитети и заеми со заокружени ануитети, во двата случаи ќе ги разгледаме само заемите со декурзивни ануитети и декурзивно пресметување на каматата, кај кои периодот на вкаматување се совпаѓа со периодот на амортизација. Останатите видови се изведуваат на сличен начин.

За крај, слободно можеме да кажеме дека заемот е еднаков на збирот на дисконтираните вредности на сите поединечни ануитети, на денот на подигање на заемот, што потсетува на пресметувањето на мизата кај рентите. Користејќи го последниот заклучок, веќе знаеме на кој начин ќе ги вршиме пресметките за величините во амортизациониот план.

Задачи за самостојна работа

1. Што е отплата, што аниутет, а што период на амортизација?

2. Наведи четири критериуми според кои се врши поделбата на заемите.

3. Како се делат заемите според времетраењето, а како според начинот на отплата?

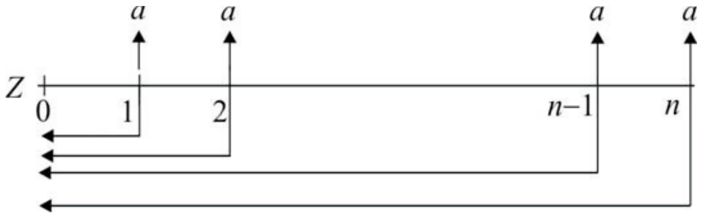
4. Што е амортизационен план?

5. Која е разликата меѓу личните и реалните заеми?

6. Која е разликата помеѓу амортизационите и рентните заеми?

9. 2. Пресметување на заемот и ануитетот кај заеми со еднакви ануитети

Подигнат е заем Z, кој треба да се отплати со n еднакви ануитети, секој од нив со износ a, каматна стапка p и декурзивно вкаматување, при што периодот на вкаматувањето се совпаѓа со периодот на исплатата на ануитетите. Декурзивниот каматен фактор е r, пресметан за секој поединечен период на вкаматување, односно со вклучување на релативната каматна стапка. Во моментот на подигање на заемот, заемот е еднаков на збирот на дисконтираните вредности на сите поединечни ануитети, кои се плаќаат на крајот на секој период. На бројната оска, сосема еднакво како кај рентите, кога се пресметува вредноста на мизата, се бележат периодите на исплата на ануитетите (црт. 1).



Црт. 1

Согласно правилата за дисконтирање, да ја пресметаме вредноста на заемот ако е позната вредноста на ануитетите. Првиот ануитет се плаќа на крајот на првиот период, па се дисконтира за еден период, вториот за два периоди, се до крај, кога последниот ануитет се дисконтира за n периоди и тоа:

$$Z=\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\frac{a}{r^3}+\ldots+\frac{a}{r^n}=\frac{a}{r}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-1}}\right).$$

Изразот во заградите претставува збир на n последователни членови на геометриска прогресија, со прв член 1 и количник $\frac{1}{r}$. Оттука,

$$Z=\frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{a}{r}\frac{\frac{r^n-1}{r^n}}{\frac{r-1}{r}},\text{ односно }\boxed{Z=a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}}.$$

Забелешка 1. Како што веќе видовме во делот за ренти, изразот $\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ може да се замени со вредноста на четвртата таблица i/i, $\mathrm{I}V_p^n$, па формулата за пресметување на заемот, кога е познат ануитетот станува $\boxed{Z=a\cdot \mathrm{I}V_p^n}$, подеднакво како и формулата за пресметување на мизата кај ренти.

Од истата формула, решавајќи ја како равенка по ануитетот, кога е познат заемот, за пресметување на ануитетот добиваме:

$$\boxed{a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}}.$$

Забелешка 2. Користејќи вредности од i/i таблиците, за ануитетот имаме $a=\frac{Z}{\mathrm{I}V_p^n}$. Се дефинира петтата i/i таблица како реципрочна вредност од четвртата, $V_p^n=\frac{1}{\mathrm{I}V_p^n}$, односно $V_p^n=\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$. Тогаш за ануитетот важи $\boxed{a=Z\cdot V_p^n}$.

1. Колкав заем може да се амортизира со еднакви ануитети од 5000 денари месечно, за пет години, со декурзивна каматна стапка $24\%\,p.a.(d)$, со месечно вкаматување?

Од податоците дадени во задачата, знаеме дека $n=5$, а има $m=12$ вкаматувања годишно и исто толку исплати на заемот во тек на една година. Тогаш вкупниот број на исплати е $nm=60$, декурзивниот каматен фактор е $r=1+\frac{24}{12\cdot 100}=1{,}02$. Според формулата за пресметување на заемот,

$$Z=a\frac{r^{60}-1}{r^{60}(r-1)}=5000\cdot\frac{1{,}02^{60}-1}{1{,}02^{60}(1{,}02)-1}=173804{,}43\text{ денари.}\ \blacklozenge$$

Од сега па натаму, со m, освен што ќе го бележиме бројот на вкаматувања годишно, ќе го бележиме и бројот на ануитети, односно периоди на амортизација, со оглед на почетните услови во кои наведовме дека истите се совпаѓаат, а со n времето на траење на амортизацијата.

2. Заем од 40000 денари, се амортизира за 10 години, со полугодишни ануитети и каматна стапка $4\%\,p.a.(d)$. Колкав е полугодишниот ануитет, ако и вкаматувањето е полугодишно? Колкава е пресметаната камата?

Зададено е $n=10, m=2$, ануитетите се полугодишни, па вкупниот број на ануитети е $nm=20$. Каматниот фактор е $r=1+\frac{4}{200}=1{,}02$. За познат заем $Z=40000$ денари, ануитетот, кој е еднаков во сите периоди на амортизација, е:

$$a=Z\frac{r^{20}(r-1)}{r^{20}}=40000\frac{1{,}02^{20}(1{,}02-1)}{1{,}02^{20}}=2447{,}27 \text{ денари.}$$

Пресметаната камата е разликата на вкупно уплатените ануитети и износот на заемот, односно пресметаната камата е $I=nm\cdot a-Z=20\cdot 2447{,}27-40000=8945{,}4$ денари. ♦

Да забележиме дека формулата за пресметаната камата, на целото времетраење на амортизацијата е претставена со разликата на вкупната вредност на ануитетите и договорениот заем, во облик $I=nm\cdot a-Z$.

3. Заем од 2000000 денари се амортизира со еднакви ануитети, во текот на 10 години, со каматна стапка $6\%\,p.a.(d)$. Пресметај го ануитетот ако исплатите се:

а) полугодишни; б) тримесечни.

Вкаматувањето се совпаѓа со периодот на амортизација.

Во двата случаи $Z=2000000$, $n=10$.

а) Ќе ја решиме задачата само со користење на i/i таблиците. Така, $a=Z\cdot V_{3}^{20}=2000000\cdot 0{,}06721571=134431{,}42$.

Изврши проверка со директна пресметка и со користење на четвртата i/i таблица.

б) За $m=4$, $r=1+\frac{6}{400}=1{,}015$, а бројот на ануитети е 40. Тогаш,

$$a=Z\frac{r^{40}(r-1)}{r^{40}}=2000000\frac{1{,}015^{40}(1{,}015-1)}{1{,}015^{40}}=66854 \text{ денари.} ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Колкав заем може да се амортизира со еднакви ануитети во текот на 8 години, со каматна стапка $5\%\,p.a.(d)$, ако ануитетот е 15000 денари. Периодот на вкаматување се совпаѓа со периодот на амортизација. Ануитетот се плаќа:

а) годишно; б) полугодишно; в)тримесечно.

Пресметките изврши ги и директно по формула и со примена на i/i таблиците.

2. Колкав заем може да се амортизира за 4 години, со каматна стапка $6\%\ p.a.(d)$, со еднакви годишни ануитети од 10000 денари? Вкаматувањето е годишно, ануитетите декурзивни.

3. Со колкави еднакви семестрални ануитети ќе се амортизира заем од 400000 денари, за време од 15 години, со каматна стапка $3\%\ p.a.(d)$? Вкаматувањето е декурзивно семестрално.

4. Кој заем се амортизира со годишен ануитет од 20000 денари, за 5 години, со $4\%\ p.a.(d)$ каматна стапка, ако вкаматувањето е годишно?

5. Заем од 50000 денари се амортизира за 5 години, со тримесечни ануитети, со каматна стапка $8\%\ p.a.(d)$. Колкав е ануитетот? Вкаматувањето е тримесечно.

9. 3. Пресметување на отплатите кај заеми со еднакви ануитети

Веќе кажавме дека секој ануитет се состои од два дела, првиот дел е отплата, која претставува еден вид на рата за враќање на договорениот заем, а вториот дел е камата, која се однесува на преостанатиот долг (остатокот од долгот) за изминатиот период. Подигнат е заем Z, кој треба да се отплати со n еднакви ануитети, секој од нив со износ a, каматна стапка p и декурзивно вкаматување, при што периодот на вкаматувањето се совпаѓа со периодот на исплата на ануитетите. Ако секоја $k-$та отплата ја бележиме со b_k, а $k-$та камата со i_k, тогаш првиот ануитет е:

$$a = b_1 + i_1,$$

каде првата камата се пресметува како камата за првиот период, на целиот заем Z, односно $i_1 = \frac{Zp}{100}$.

Се разбира, за почеток ќе сметаме дека стапката p се однесува на еден период на вкаматување, а понатаму ќе внимаваме да ја употребуваме релативната каматна стапка.

Вториот ануитет е еднаков со првиот, но со различна отплата и камата, $a = b_2 + i_2$. Каматата сега се однесува на преостанатиот дел од долгот, а тоа е $Z - b_1$ од каде $i_2 = \frac{(Z - b_1)p}{100}$.

Третиот ануитет е $a = b_3 + i_3$, каде $i_3 = \frac{(Z - b_1 - b_2)p}{100}$, од причина што веќе се исплатени две отплати од долгот, а преостанатиот дел е $Z - b_1 - b_2$.

Разгледувајќи ги на ист начин секој од поединечните ануитети, доаѓаме и до последниот $a = b_n + i_n$, каде каматата се пресметува за преостанатиот дел од долгот $Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1}$, односно $i_n = \frac{(Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1})p}{100}$.

За да ја определиме врската меѓу отплатите, ќе ги изедначиме последователните ануитети кои се меѓусебно еднакви. Така, ако ги изедначиме првите два ануитети, добиваме $b_1 + i_1 = b_2 + i_2$, односно $b_1 + \frac{Zp}{100} = b_2 + \frac{(Z - b_1)p}{100}$.

Оттука, $b_1 + \frac{b_1 p}{100} = b_2$ или поинаку запишано:

$$b_2 = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 r .$$

На ист начин, ако изедначиме било кои два последователни ануитети, $k-$тиот и $k+1-$виот, имаме:

$$b_k + \frac{(Z - b_1 - \ldots - b_{k-1})p}{100} = b_{k+1} + \frac{(Z - b_1 - \ldots - b_{k-1} - b_k)p}{100},$$

од каде, средувајќи го равенството, добиваме:

$$\boxed{b_{k+1} = b_k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_k r}, \text{ за секое } k \in \{1,2,\ldots,n-1\}.$$

Последново укажува на фактот дека отплатите формираат геометриска прогресија, со прв член, првата отплата, b_1 и количник, каматниот фактор r. Уште повеќе, секоја отплата може да се пресмета со формулата $\boxed{b_k = b_1 r^{k-1}}$.

Забелешка 1. Вклучувајќи ја првата i/i таблица, за отплатата важи $\boxed{b_k = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^{k-1}}$.

1. Заем се амортизира со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување. Определи ја петтата отплата, ако деветтата е 2343,322 денари. Каматната стапка е $8\%\ p.a.(d)$.

Позната е отплатата $b_9 = 2343{,}322$, а ја бараме b_5. Од својствата на геометриската прогресија, $b_5 = b_1 r^4$, а $b_9 = b_1 r^8$. Каматниот фактор е $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$. Количникот на отплатите кои ги разгледуваме е $\frac{b_9}{b_5} = \frac{b_1 r^8}{b_1 r^4} = r^4$, па оттука за петтата отплата важи:

$$b_5 = \frac{b_9}{r_4} = \frac{2343{,}322}{1{,}02^4} = 2164{,}87 \text{ денари.} \blacklozenge$$

Се поставува прашањето, како да се определат отплатите доколку не е позната првата отплата, туку заемот или ануитетот, како што и реално се случува. За да се определат отплатите преку заемот Z, доволно е да забележиме дека заемот е збир на сите отплати. Така,

$$Z = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 r + b_1 r^2 + \ldots + b_1 r^{n-1} = b_1\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right),$$

при што изразот во заградата е геометриска прогресија со прв член 1 и количник r. Тогаш,

$$\boxed{Z = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Забелешка 2. Заменувајќи го изразот $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ со $1 + \mathrm{III}_p^{n-1}$, за заемот добиваме

$$\boxed{Z = b_1\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)}.$$

Од последното равенство, за отплатата изразена преку заемот, при познат број на ануитети и каматна стапка добиваме:

$$b_1 = Z \frac{r - 1}{r^n - 1},$$

а во општ случај, $k-$тата отплата се пресметува со формулата:

$$\boxed{b_k = Z \frac{r - 1}{r^n - 1} r^{k-1}}.$$

Со замена на вредноста на заемот преку ануитетот $Z = a \frac{r^n - 1}{r^n\left(r - 1\right)}$, ќе ја добиеме формулата за првата отплата преку ануитетот:

$$b_1 = Z \frac{r - 1}{r^n - 1} = a \frac{r^n - 1}{r^n\left(r - 1\right)} \frac{r - 1}{r^n - 1}$$

или конечно,

$$\boxed{b_1 = \frac{a}{r^n}}.$$

Забелешка 3. Од последното, веднаш може да запишеме $b_1 = a \cdot \mathrm{II}_p^n$, односно $\boxed{a = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^n}$.

На крај, за $k-$тата отплата, изразена преку ануитетот добиваме $b_k = \frac{a}{r^n} r^{k-1} = \frac{a}{r^{n-k+1}}$.

Забелешка 4. Последното равенство, преку таблиците i/i може да го запишеме во облик $\boxed{b_k = a \cdot \mathrm{II}_p^{n-k+1}}$.

Ќе забележиме уште дека, врската меѓу ануитетот и последната отплата е зададена со $b_n = \frac{a}{r} = a \cdot \mathrm{II}_p^1$, односно $a = b_n \cdot \mathrm{I}_p^1$.

2. Заем се амортизира за 5 години, со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматаување. Определи ја шестата отплата, ако ануитетот е 4120 денари и со каматна стапка $6\%\,p.a.(d)$.

Ќе ја определиме прво првата отплата, а преку неа и шестата. Знаеме дека $a = 4120$ денари, $n = 5$, $m = 2$, па заемот се амортизира со 10 ануитети, при што каматниот фактор е $r = 1 + \frac{6}{200} = 1{,}03$. Тогаш, $b_1 = \frac{a}{r^n} = \frac{4120}{1{,}03^{10}} = 3065{,}67$ денари. Оттука, заради својствата на геометриската прогресија која ја формираат отплатите, шестата отплата е $b_6 = b_1 r^5 = 3065{,}67 \cdot 1{,}03^5 = 3553{,}95$ денари. ♦

3. Колкав е ануитетот со кој треба да се амортизира заем за 6 години, со каматна стапка $4\%\,p.a.(d)$? Ануитетите и вкаматувањето се годишни, а позната е само четвртата отплата која изнесува $8479{,}34$ денари.

Позната е четвртата отплата $b_4 = 8479{,}34$, каматниот фактор $r = 1{,}04$ и бројот на ануитети 6. Тогаш од формулата која директно ги поврзува ануитетот и отплатата имаме $b_4 = b_1 r^3 = \frac{a}{r^6} r^3 = \frac{a}{r^3}$. Во нашиот случај добиваме равенка $8479{,}34 = \frac{a}{1{,}04^3}$, од каде ануитетот е $a = 9538{,}09$ денари.

Заемот пак е $Z = a\frac{r^6 - 1}{r^6(r-1)} = 9538{,}09\frac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04^6(1{,}04) - 1} = 60000$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја десеттата отплата на заем, кој се амортизира со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување, ако каматната стапка е $12\%\,p.a.(d)$, а шестата отплата е 15000 денари.

2. Колкав е ануитетот, а колкав заемот, ако амортизацијата трае 4 години, со еднакви четиримесечни ануитети, со стапка $9\%\,p.a.(d)$, со четиримесечно вкаматување, ако десеттата отплата е 16000 денари?

3. Заем се амортизира за 6 години со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување. Каматната стапка е $18\%\,p.a.(d)$, а збирот на третата и шестата отплата е 40000 денари. Колкав е заемот, а колкав ануитетот?

4. Колкав е ануитетот со кој треба да се амортизира заем за 6 години, со каматна стапка $4\%\,p.a.(d)$, ако ануитетите и вкаматувањето се годишни, а познато е дека разликата на шестата и четвртата отплата е $691{,}9$ денари.

5*. Заем од 200000 денари се амортизира за 10 години, со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Најди ја каматата во шестата година, ако каматната стапка е $5\% p.a.(d)$. (Упатство: пресметај ги сите отплати заклучно со петтата).

9. 4. Пресметување на отплатениот дел и остатокот од заемот кај заеми со еднакви ануитети

При пресметувањето на отплатите, основна претпоставка ни беше дека заемот е збир на сите отплати. Врз основа на ова, отплатениот дел од заемот за k периоди, заклучно со $k-$тиот ануитет, O_k е збирот на првите k отплати, односно:

$$O_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k,$$

заменувајќи за поединечните отплати добиваме:

$$O_k = b_1 + b_1 r + \ldots + b_1 r^{k-1} = b_1\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1}\right),$$

а од збирот на геометриската прогресија во заградите следува дека отплатениот дел од заемот, за k периоди е:

$$\boxed{O_k = b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}}.$$

Забелешка 1. Со воведување на вредностите од третата i/i таблица, за отплатениот дел важи $\boxed{O_k = b_1 \cdot \left(1 + \mathrm{III}_p^k\right)}$.

Се разбира последната формула соодветствува и на претходно добиената формула за заемот, преку отплатите, кога се пресметува отплатениот дел после $n-$тиот период, односно за $k = n$.

Се поставува и прашањето колкав е преостанатиот дел од долгот. Се разбира, тоа е разликата меѓу заемот и отплатениот дел. Делот од заемот кој останува да се отплати после $k-$тиот ануитет, се бележи со R_{n-k} и за него имаме:

$$R_{n-k} = Z - O_k = Z - b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}.$$

Доколку ја замениме формулата за заемот преку првата отплата, добиваме

$$R_{n-k} = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} - b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1},$$ односно:

$$\boxed{R_{n-k} = b_1 \frac{r^n - r^k}{r - 1}}.$$

Доколку и заемот и отплатениот дел ги изразиме преку ануитетот, тогаш $R_{n-k} = a \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)} - \frac{a}{r^n} \frac{r^k - 1}{r - 1}$, односно $\boxed{R_{n-k} = a \frac{r^n - r^k}{r^n (r - 1)}}$.

Забелешка 2. Ако го замениме изразот $\frac{r^n - r^k}{r^n(r-1)}$, со соодветната вредност од четвртата i/i таблица, за остатокот од долгот по исплатениот $k-$ти ануитет, важи

$\boxed{R_{n-k} = a \cdot \mathrm{I}V_p^{n-k}}$.

1. Заем од 30000 денари треба да се амортизира за 8 години, со каматна стапка од $5\%\, p.a.(d)$, со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Исплатени се 10 ануитети. Колкав е остатокот од долгот?

Заемот се амортизира со вкупно 16 ануитети. Каматниот фактор е $r = 1{,}025$. Да ги пресметаме прво ануитетот и првата отплата. Така, за ануитетот имаме:

$a = 30000\frac{1{,}025^{16}(1{,}025-1)}{1{,}025^{16}-1} = 2297{,}97$ денари, а за првата отплата

$b_1 = \frac{a}{r^{16}} = \frac{2297{,}97}{1{,}025^{16}} = 1547{,}97$ денари.

Сега, за остатокот на долгот имаме:

$R_6 = b_1\frac{r^{16}-r^{10}}{r-1} = 1547{,}97\frac{1{,}025^{16}-1{,}025^{10}}{1{,}025-1} = 12657{,}5$ денари.

Од пресметаниот остаток, можеме да го пресметаме и отплатениот дел на заемот, имено $O_{10} = Z - R_6 = 30000 - 12657{,}5 = 17342{,}5$ денари се веќе отплатени. ♦

2. Заем од 100000 денари се амортизира 50 години, со каматна стапка $4\%\, p.a.(d)$ со годишно вкаматување. Колкав е остатокот од долгот по 20 отплатени годишни ануитети?

Примерот ќе го решиме со примена на i/i таблиците. Ќе ги пресметаме и остатокот од долгот и отплатениот дел. За остатокот од долгот важи $R_{30} = a\cdot \mathrm{I}V_4^{30}$. Да го пресметаме прво ануитетот.

За ануитетот имаме $a = Z\cdot V_4^{50} = 100000\cdot 0{,}046552 = 4655{,}2$, Првата отплата е $b_1 = a\cdot \mathrm{II}_4^{50} = 4655{,}2\cdot 0{,}140707 = 655{,}02$. Остатокот од долгот е:

$R_{30} = a\cdot \mathrm{I}V_4^{30} = 4655{,}2\cdot 17{,}292033 = 80494{,}75$ денари,

а отплатениот долг е $O_{20} = b_1\cdot\left(1+\mathrm{III}_4^{20}\right) = 655{,}02\cdot 29{,}77807857$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Заем се амортизира во тек на 40 години, со каматна стапка $6\%\, p.a.(d)$, со полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Најди го остатокот на долгот после 30 платени ануитети, ако дваесеттата отплата е 1000 денари.

2. Заем од 200000 денари се амортизира со полугодишни ануитети кои се плаќаат во текот на 25 години. Каматната стапка е $8\% \, p.a.(d)$, со полугодишно вкаматување. Колкав е отплатениот долг со ануитетите платени од $21-$виот заклучно со $30-$тиот ануитет? (Најди ја разликата $O_{30}-O_{20}$).

3. Заем се амортизира во тек на 40 години, со каматна стапка $4\% \, p.a.(d)$, со годишни ануитети и годишно вкаматување. Со првите 25 отплати, долгот е намален за 40000 денари. Колкав е заемот?

4. Заем се амортизира во текот на 50 години, со каматна стапка $5\% \, p.a.(d)$, со годишно вкаматување. Со годишни ануитети од $21-$виот заклучно со $30-$тиот, отплатени се 10000 денари од долгот. Колкав е долгот?

5. Заем од 1000000 денари се амортизира за 20 години, со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Каматната стапка е $4\% \, p.a.(d)$. Колкав дел од долгот е отлатен после 10 години?

9. 5. Пресметување на каматната стапка и бројот на периоди на амортизација кај заеми со еднакви ануитети

Според формулите за пресметување на заемот и ануитетот, можат да се изразат каматната стапка или периодите на амортизација како непознати големини, преку другите познати големини. На сличен начин како кај рентите, со директни пресметки или со користење на i/i таблици, низ неколку задачи, ќе видиме како можат тоа да го направиме.

Една формула, од која можеме да почнеме е формулата за пресметување на заемот. Имено, со трансформација на равенството $Z=a\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$, по рокот на амортизација n, добиваме:

$$\frac{Z(r-1)}{a}=1-\frac{1}{r^n},$$

од каде понатаму имаме $\dfrac{1}{r^n}=\dfrac{a-Z(r-1)}{a}$, односно:

$$r^n=\frac{a}{a-Z(r-1)}.$$

Ако го логаритмираме равенството, за рокот на амортизација n важи:

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a-Z(r-1)}}.$$

Кога станува збор за пресметување на каматната стапка, еден начин е да се користи основната формула за заемот преку четвртата i/i таблица $\boxed{Z = a \cdot \mathrm{I}V_p^n}$, но може и со директни пресметки, доколку равенките кои се добиваат имаат едноставен метод за решавање.

Секако, постапката за линеарна интерполација, веќе неколку пати ја илустриравме, истата по потреба може да се користи и овде.

Во зависност од податоците кои се дадени во задачите, покрај наведените, може да се користи било која друга позната формула за пресметување на рокот на амортизација и каматната стапка.

1. За кое време, заем од 60000 денари, ќе се амортизира со еднакви годишни ануитети од 4000 денари, со каматна стапка од $4\%\ p.a.(d)$ и годишно вкаматување?

Според формулата за пресметување на заемот, имаме $Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$. Можеме директно да замениме, а да логаритмираме на крај. Имено, $60000 = 4000\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n(1{,}04-1)}$, од каде $\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n} = 0{,}6$, односно $0{,}4 \cdot 1{,}04^n = 1$. Тогаш, $1{,}04^n = 2{,}5$, односно со логаритмирање, $n = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}04} = 23{,}36$ години. Конечно, времето на амортизација не е цел број, па 23 ануитети се еднакви, а $24-$тиот се разликува. За ануитетниот остаток ќе зборуваме подоцна. ♦

2. Заемот се амортизира со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување. Да се пресмета каматната стапка доколку знаеме дека разликата на петтата и третата отплата е $840{,}64$ денари, а збирот на третата и шестата отплата е $42889{,}62$ денари.

Ќе го пресметаме декурзивниот каматен фактор. Од условите може да составиме систем равенки:

$$\begin{cases} b_5 - b_3 = 840{,}64 \\ b_6 + b_3 = 42889{,}62 \end{cases}.$$

Ќе ги развиеме по првата отплата и каматниот фактор. Добиваме еквивалентен систем

$$\begin{cases} b_1 r^4 - b_1 r^2 = 840{,}64 \\ b_1 r^5 + b_1 r^2 = 42889{,}62 \end{cases},$$

од кој со делење на равенките имаме $\dfrac{b_1 r^2(r^2-1)}{b_1 r^2(r^3+1)} = \dfrac{840{,}64}{42889{,}62} = 0{,}0196$. Последното равенство, по кратењето, се сведува на равенка $\frac{(r-1)(r+1)}{(r+1)(r^2-r+1)}=0{,}0196$, од каде $\frac{r+1}{r^2-r+1}=0{,}0196$. Ова е квадратна равенка по каматниот фактор

$$0{,}0196r^2-1{,}0196r+1{,}0196=0,$$

со решенија $r_1=1{,}02$ и $r_2=51$. Втората вредност нема смисла за каматен фактор, а од првата, јасно е дека $1+\frac{p}{400}=1{,}02$, односно $p=8\%p.a.(d)$. ♦

3. Со која каматна стапка заем од 40000 денари ќе се амортизира за 10 години, со еднакви годишни ануитети од 4550 денари и годишно вкаматување?

Бидејќи ги знаеме и заемот и ануитетот, ќе појдеме од основната формула $Z=a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$, односно $Z=a\cdot \mathrm{I}V_p^{10}$. Оттука, вредноста од четвртата i/i таблица за $n=10$ е $\mathrm{I}V_p^{10}=8{,}79120879$. Читаме во таблицата, каде бројот во редицата за $n=10$ не го наоѓаме. Тогаш, мора да интерполираме. Податоците се запишани во табела.

$\mathrm{I}V_p^{10}$	p	$\mathrm{I}V_p^{10}$	p
8,86621634	2,25%	8,86621634	2,25%
7,75206393	2,5%	8,79120879	p
0,11415241	$-0{,}25\%$	0,07500755	$2{,}25-p$

Ја формираме пропорцијата од добиените разлики:

$0{,}11415241:0{,}25=0{,}07500755:(p-2{,}25)$, од каде $p-2{,}25=0{,}16$, односно $p=2{,}41\%\,p.a.(d)$.

До истиот резултат се доаѓа и ако се користи петтата i/i таблица, во која $V_p^{10}=0{,}011375$, а ја користиме формулата $a=Z\cdot V_p^{10}$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Со која годишна каматна стапка, за 5 години, ќе се амортизира заем од 60000 денари, со тримесечни ануитети од $3669{,}42$ денари?

2. За кое време, ќе отплатиме заем од 200000 денари со полугодишни ануитети од $9310{,}04$ денари, со каматна стапка $8\%\,p.a.(d)$, со полугодишно вкаматување?

3. Со која каматна стапка, заем од 1000000 денари, ќе се амортизира со годишни ануитети од $61776{,}61$ денар, за 25 години?

4. Со која годишна каматна стапка се амортизира заем од 119200 денари, со годишен ануитет 13700 денари, за 11 години со годишно капитализирање?

5. Заем од 400000 денари се отплаќа со еднакви семестрални ануитети од $24462{,}68$ денари. Пресметај го времето на отплаќање на заемот, ако каматната стапка е $4\%\, p.a.(d)$ и полугодишно вкаматување.

9. 6. Амортизационен план за заем со еднакви ануитети

Кога заем од Z денари, се амортизира со еднакви ануитети, тогаш на крајот на секој период, должникот треба да плати еднакви износи кои се состојат од два дела, дел за отплата на долгот и дел за камата за преостанатиот долг.

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	Z	$i_1 = {}^{Zp}\!/_{100}$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = {}^{R_{n-1}p}\!/_{100}$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = {}^{R_2 p}\!/_{100}$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = {}^{R_1 p}\!/_{100}$	$b_n = a - i_n$	a

При овој начин на плаќање на заемот, во секој нареден период, се зголемува делот за отплата на заемот, а се намалува делот за каматата за преостанатиот долг. Отплатата на долгот се врши по однапред определен план, амортизационен план, кој заради поголема прегледност се претставува со табела.

Распоредот по колони може да се разликува од овој во наведената табела, но потребно е да се застапени сите колони.

На пример, ќе покажеме како се врши изработувањето на амортизациониот план, чекор по чекор, а на крај ќе ја пополниме табелата.

1. Заем од 100000 денари се амортизира со еднакви годишни ануитети во текот на 5 години, со каматна стапка $4\%\, p.a.(d)$ и годишно вкаматување. Изработи амортизационен план за отплатата на заемот.

Вкаматувањето е годишно со каматен фактор $r = 1{,}04$. Има вкупно 5 ануитети.

Вредноста на ануитетот е $a = 100000\dfrac{1{,}04^5(1{,}04)-1}{1{,}04^5-1} = 22462{,}8$ денари.

- првиот остаток е целиот долг $R_5 = Z = 100000$ денари;

-првата камата е $i_1 = \dfrac{Zp}{100} = 100000\dfrac{4}{100} = 4000$ денари - камата на целиот долг;

- првата отплата е $b_1 = a - i_1 = 22462{,}8 - 4000 = 18462{,}8$ денари;

- вториот остаток по еден платен ануитет, на крајот на првата година е:
$R_4 = Z - b_1 = 100000 - 18462{,}8 = 81537{,}2$ денари;

- втората камата е $i_2 = \frac{R_4 p}{100} = 81537{,}2 \frac{4}{100} = 3261{,}5$ денари - камата за вториот остаток;

- втората отплата е $b_2 = a - i_2 = 22462{,}8 - 3261{,}5 = 19201{,}3$ денари;

- третиот остаток по два платени ануитети, на крајот на втората година е:
$R_3 = R_4 - b_2 = 81537{,}2 - 19201{,}3 = 62335{,}9$ денари;

- третата камата е $i_3 = \frac{R_3 p}{100} = 62335{,}9 \frac{4}{100} = 2493{,}44$ денари - камата за вториот остаток;

- третата отплата е $b_3 = a - i_3 = 22462{,}8 - 2493{,}44 = 19969{,}36$ денари;

- четвртиот остаток по три платени ануитети, на крајот на третата година е:
$R_2 = R_3 - b_3 = 62335{,}9 - 19969{,}36 = 42366{,}5$ денари;

- четвртата камата е $i_4 = \frac{R_2 p}{100} = 42366{,}5 \frac{4}{100} = 1694{,}66$ денари - камата за третиот остаток;

- четвртата отплата е $b_4 = a - i_4 = 22462{,}8 - 1694{,}66 = 20768{,}14$ денари;

- петтиот остаток по четири платени ануитети, на крајот на четвртата година е:
$R_1 = R_2 - b_4 = 42366{,}5 - 20768{,}14 = 21598{,}4$ денари;

- петтата камата е $i_5 = \frac{R_1 p}{100} = 21598{,}4 \frac{4}{100} = 863{,}9$ денари - камата за четвртиот остаток;

- петтата отплата е $b_5 = a - i_5 = 22462{,}8 - 863{,}9 = 21598{,}4$ денари;

- шестиот остаток по пет платени ануитети е:
$R_0 = R_1 - b_5 = 21598{,}4 - 21598{,}4 = 0$ денари - што значи дека долгот е отплатен.

Вака пресметаните вредности ќе ги внесеме во табела.

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	100000	4000	18462,8	22462,8
2	81537,2	3261,5	19201,3	22462,8
3	62335,9	2493,44	19969,36	22462,8
4	42366,5	1694,66	20768,14	22462,8
5	21598,4	863,9	21598,4	22462,8
сума	307838	12313,5	100000	

По направениот амортизационен план, потребно е да извршиме проверка за точност на амортизациониот план:

услов 1. Збирот на сите отплати треба да е еднаков со заемот $\sum b_j = Z$;

услов 2. Последната отплата треба да е еднаква на последниот остаток, $b_n = R_1$;

услов 3. Збирот на колоната камати и колоната отплати треба да е еднаков на производот на бројот на периоди на амортизација и ануитетот, $\sum i_j + \sum b_j = na$;

услов 4. Ануитет е збир на секоја камата и соодветната отплата, $a = b_j + i_j$;

услов 5. Збирот на колоната камати е еднаков на каматата пресметана на збирот на колоната заем остаток $\sum i_j = \frac{p}{100} \sum R_j$.

Во примерот лесно се проверува дека се задоволени сите овие услови. Така во колоната за отплати, сумата на сите отплати е 100000 денари, колку што е заемот. Последната отплата и последниот остаток се еднакви.

Потоа, $\sum i_j + \sum b_j = 12313{,}5 + 100000 = 112313{,}5 = 5 \cdot 22462{,}8 = 112314$. Исто така, ануитетот е збир на соодветните отплата и камата, пример за четвртиот ануитет важи $1694{,}66 + 20768{,}14 = 22462{,}8$. Конечно, $12313{,}5 = 307838 \cdot \frac{4}{100} = 12313{,}52$, па исполнет е и последниот, петти услов. ♦

2. Заем се амортизира со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување. Каматната стапка е $8\%\, p.a.(d)$. Состави амортизационен план за последните три периоди, ако каматата во вториот период е $496{,}48$ денари, а каматата во петтиот период е $371{,}61$ денар.

Во оваа задача, амортизациониот план ќе се однесува само на трите последни ануитети. За почеток немаме информација ниту колку ануитети се отплаќаат. Да ги запишеме условите кои ги имаме: $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$ и $\begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases}$.

Ќе го решиме системот по првата отплата и ануитетот.

$$\begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_2 = 496{,}48 \\ a - b_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_1 r = 496{,}48 \\ a - b_1 r^4 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1{,}02 b_1 = 496{,}48 \\ a - 1{,}02^4 b_1 = 371{,}61 \end{cases}.$$

Со одземање на равенките од системот, добиваме $(1{,}02^4 - 1{,}02) b_1 = 124{,}8$, односно $b_1 = 2000$ денари и $a = 2536{,}48$ денари.

Понатаму, за да го најдеме бројот на периоди за амортизација, ќе ја искористиме формулата за првата отплата $b_1 = \frac{a}{r^{4n}} = \frac{a}{1{,}02^{4n}}$.

Тогаш, $1{,}02^{4n}=\frac{2536{,}48}{2000}=1{,}26824$, од каде со логаритмирање $4n=\frac{\log 1{,}26824}{\log 1{,}02}=12$. Значи, заемот се амортизира со 12 ануитети, во текот на 3 години.

Последните три отплати можеме да ги пресметаме по формула и тоа: $b_{10}=b_1r^9=2000\cdot 1{,}02^9=2390{,}19$, $b_{11}=b_1r^{10}=2000\cdot 1{,}02^{10}=2437{,}99$ и $b_{12}=b_1r^{11}=2000\cdot 1{,}02^{11}=2486{,}74$.

Да ги определиме и соодветните остатоци.

Деветтиот остаток е $R_{12-9}=R_3=a\frac{r^{12}-r^9}{r^{12}(r-1)}=2536{,}48\frac{1{,}02^{12}-1{,}02^9}{1{,}02^{12}(1{,}02-1)}=7314{,}91$ денари, десеттиот остаток е $R_{12-10}=R_2=R_3-b_{10}=4924{,}72$ денари и единаесеттиот остаток е $R_{12-11}=R_1=R_2-b_{11}=2486{,}74=b_{12}$. Каматите се пресметуваат или преку остатоците, или уште полесно $i_j=a-b_j$, па $i_{10}=a-b_{10}=146{,}29$, $i_{11}=a-b_{11}=98{,}49$ и $i_{12}=a-b_{12}=49{,}73$. Да ја составиме табелата за амортизациониот план:

Период	Остаток	Камата	Отплата
10	7314,91	146,29	2390,19
11	4924,72	98,49	2437,99
12	2486,74	49,73	2486,74

Не можеме да извршиме проверка затоа што го немаме целиот план.

Задачи за самостојна работа

1. Заем од 100000 денари се амортизира за 6 години со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Годишната каматната стапка е $4\%\,p.a.(d)$. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.

2. Состави амортизационен план за заем од 80000 денари, кој треба да се амортизира за 6 години со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Годишната каматната стапка е $5\%\,p.a.(d)$.

3. Заем од 100000 денари се амортизира за 6 години со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Годишната каматната стапка е $8\%\,p.a.(d)$. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.

4. Заем од 10000 денари се амортизира за 4 години со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Годишната каматната стапка е $10\%\,p.a.(d)$. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.

5. Заем се амортизира со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Состави амортизационен план, ако првата отплата е 20000 денари, каматата во последниот период е $3221{,}02$ денари и каматата во претпоследниот период е $6149{,}22$ денари.

9. 7. Заеми со заокружени ануитети

Ануитетот a, на определен заем, може да биде зададен во конкретен износ или пак како процент од заемот. Овие ануитети најчесто се заокружуваат на цели броеви (десетки, стотки и сл.), а оттука се нарекуваат и **заокружени ануитети**, а заемите се **заеми со заокружени ануитети**. Доколку ануитетот не е зададен на еден од горе наведените начини, а постои услов заемот да се амортизира со заокружени ануитети, тогаш е потребно е да се пресмета процентот за пресметување на ануитетот. И овде ќе зборуваме за декурзивни заеми, со отплата на крајот на периодот на амортизација и со декурзивно пресметување на каматата.

Најчесто се дадени заемот, периодите на амортизација и каматната стапка, а да треба да се определи ануитетот, ама со заокружена вредност, а потоа да се определи и последниот ануитет различен од останатите.

Нека се дадени висината на заемот Z, каматната стапка $p\%\, p.a.(d)$. Ако е познат бројот на периодите на амортизација, тогаш се бара процент p_1 кој се наоѓа меѓу $100V_p^n$ и $100V_p^{n-1}$, што произлегува од фактот дека треба да се извршат $n-1$ отплата со еднакви ануитети и $n-$тата отплата со ануитет a_1 помал од останатите. Заокружените ануитети се поголеми од еднаквите ануитети, па последниот ануитет е различен од останатите, помал од нив и се вика **ануитетен остаток**.

Значи, доколку не го знаеме заокружениот ануитет, тој се изразува во процент p_1 од заемот, најчесто цел број или со формула $\boxed{a=\frac{p_1 Z}{100}}$, при што важи:

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}<p_1<100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}}.$$

1. Заем од 130000 денари се амортизира за 6 години, со каматна стапка $5\%\, p.a.(d)$, со заокружени семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Пресметај го заокружениот ануитет.

Каматниот фактор е $r=1+\frac{5}{200}=1{,}025$, а бројот на ануитети $6\cdot 2=12$. Процентот p_1 ќе го определиме согласно зададеното неравенство:

$$100\frac{1{,}0025^{12}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1}<p_1<100\frac{1{,}025^{11}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1}\text{, односно:}$$

$9{,}74\% < p_1 < 10{,}51\%$.

За процентот p_1 ќе избереме вредност $p_1 = 10\%$, процент меѓу добиените граници, а сепак цел број и погоден за понатамошни пресметки.

Соодветниот заокружен ануитет ќе биде

$$a = \frac{p_1 Z}{100} = \frac{10}{100}130000 = 13000 \text{ денари.}$$

Во случај добиениот ануитет да не е цел број, истиот се заокружува на десетки или стотки.

Може да се случи, да го знаеме заокружениот ануитет , а да сакаме да го пресметаме бројот на периодите на амортизација. Истиот можеме да го пресметаме како кај заемите со еднакви ануитети, $n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a - Z(r-1)}$, само што ја користиме познатата вредност на заокружениот ануитет. Кога добиената вредност за периоди на амортизација n не е цел број, го земаме првиот природен број поголем од добиениот.

И тука, n – тиот ануитет a_1 се разликува од останатите. ♦

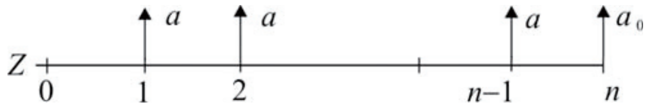
2. Заем од 200000 денари се амортизира со заокружени полугодишни ануитети од 40000 денари и полугодишно вкаматување. Каматната стапка е $10\%\, p.a.(d)$. За колку периоди ќе се амортизира заемот?

Заокружениот ануитет е зададен со апсолутен износ, кој во исто време претставува $\frac{40000}{200000} = 20\%$ од заемот. Декурзивниот каматен фактор е $r = 1{,}05$. Тогаш, за бројот на периоди на амортизација важи

$n = \frac{1}{\log 1{,}05}\log\frac{40000}{40000 - 200000(1{,}05-1)} = 5{,}896$, а оттука заемот ќе се амортизира за 6 периоди, со 5 ануитети по 40000 денари, а шестиот се разликува и е помал од 40000 денари. ♦

Се поставува прашањето колкав е ануитетот кој се разликува од заокружениот, односно колкав е **последниот ануитет** или како што поинаку се нарекува **ануитетниот остаток**.

На ист начин како кај рентниот остаток и овде ги дисконтираме ануитетите, а збирот на дисконтираните вредности го определува заемот Z.



Црт. 2

Согласно со илустрираното на временската оска (црт. 2), за заемот добиваме
$$Z=\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\frac{a}{r^3}+...+\frac{a_1}{r^n}=\frac{a}{r}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^{n-2}}\right)+\frac{a_1}{r^n}.$$

Изразот во заградите претставува збир на $n-1$ последователни членови на геометриска прогресија, со прв член 1 и количник $\frac{1}{r}$. Оттука,
$$Z=\frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}}+\frac{a_1}{r^n}=\frac{a}{r}\frac{\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}}}{\frac{r-1}{r}}+\frac{a_1}{r^n}=a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}+\frac{a_1}{r^n}.$$

Сега, за последниот ануитет добиваме:
$$\boxed{a_1=\left[Z-a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n}.$$

Забелешка 1. Ако изразот $\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ го замениме со соодветната вредност од финансиските таблици $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, за последниот ануитет важи
$$\boxed{a_1=\left[Z-a\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]r^n=\left[Z-a\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]\cdot \mathrm{I}_p^n}.$$

Забелешка 2. Својствата на отплатите и ануитетите кај заемите со заокружени ануитети се исти како кај заемите со еднакви ануитети. Отплатите формираат геометриска прогресија, со прв член, првата отплата, b_1 и количник каматниот фактор r. И секако, ануитетот е збир на отплатата и соодветната камата.

3. Заем од 10000 денари, се амортизира со годишни ануитети од 2500 денари, со каматна стапка $4\%\, p.a.(d)$ и годишно вкаматување. Пресметај за колку години ќе се амортизира заемот и колкав е ануитетниот остаток.

Декурзивниот каматен фактор е $r=1{,}04$, а ануитетите ќе ги сметаме како заокружени ануитети. За бројот на периоди на амортизација имаме $n=\frac{1}{\log 1{,}04}\log\frac{2500}{2500-10000(1{,}04-1)}=4{,}445$. Тогаш, се плаќаат 5 ануитети, од кои првите четири по 2500 денари, а последниот е различен и со износ:
$$a_1=\left[Z-a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n=\left[10000-2500\frac{1{,}04^4-1}{1{,}04^4(1{,}04-1)}\right]1{,}04^5=1125{,}72 \text{ денари.} ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Заем се амортизира за 5 години со заокружени тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување, со каматна стапка $40\% \, p.a.(d)$. Најди го заемот, ако каматата во вториот период е 4000 денари, а петтата отплата е 14641 денар.

(Упатство: Заемот пресметај го преку заокружениот ануитет и процентот p_1)

2. Заем од 128000 денари се амортизира со заокружени годишни ануитети и годишно вкаматување, со каматна стапка $7\% \, p.a.(d)$. За колку време ќе се амортизира заемот, ако заокружениот ануитет е 12000 денари?

3. За колку периоди ќе се амортизира заем, кој се отплаќа со заокружени четиримесечни ануитети и исто такво вкаматување, со каматна стапка $12\% \, p.a.(d)$? Заокружениот ануитет е 30000 денари, а првата отплата е 12000 денари.

4. Заем се амортизира за две години со заокружени полугодишни ануитети и полугодишно вкамтување. Колкав е заемот, а колкав заокружениот ануитет, ако ануитетниот остаток е $14317{,}9$ денари, а последната отплата $13767{,}2$ денари?

5. Заем се амортизира за 7 години со заокружени полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување, со каматна стапка $8\% \, p.a.(d)$. Определи го заемот и заокружениот ануитет, ако ануитетниот остаток е $249{,}36$ денари.

9. 8. Амортизационен план за заеми со заокружени ануитети

Изработувањето на амортизационен план за заем со заокружени ануитети, е на истиот начин како кај заеми со еднакви ануитети, освен во последен ред, каде се запишува последниот различен ануитет. Притоа и последната отплата е помала од останатите. Прво е неопходно да се пресметаат потребните величини, а потоа се пополнува амортизациона табела.

1. Заем од 1000000 денари се амортизира со годишни ануитети, со каматна стапка $20\% \, p.a.(d)$ и годишно вкаматување. Рокот на отплата е 5 години. Изработи амортизационен план ако заемот има заокружени ануитети.

Заемот се амортизира со 5 ануитети, со каматен фактор $r = 1{,}2$. Да го пресметаме заокружениот ануитет, пресметувајќи го процентот со кој ануитетот е претставен како дел од заемот. Од неравенството кое треба да биде задоволено за процентот p_1,

$$100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1},$$ со замена на податоците имаме:

$100\frac{1{,}2^5(1{,}2-1)}{1{,}2^5-1} < p_1 < 100\frac{1{,}2^4(1{,}2-1)}{1{,}2^4-1}$, односно:

$33{,}44 < p_1 < 38{,}63$.

Ќе избереме $p_1 = 35\%$, иако може да се избере било која вредност во наведените граници. Тогаш, заокружениот ануитет изнесува $a = \frac{35}{100} \cdot 1000000 = 350000$ денари. Четири, од петте, ануитети се со износ 350000 денари, а последниот ануитет е $a_1 = \left[1000000 - 350000\frac{1{,}2^4-1}{1{,}2^4(1{,}2-1)}\right]1{,}2^5 = 233760$ денари.

Да ги извршиме поединечните пресметки:

- првиот остаток е целиот долг $Z = R_5 = 1000000$;
- првата камата е камата за првиот остаток, $i_1 = \frac{20}{100}R_5 = 200000$ денари;
- првата отплата е $b_1 = a - i_1 = 350000 - 200000 = 150000$ денари;
- вториот остаток е $R_4 = R_5 - b_1 = 850000$ денари;
- втората камата е камата за вториот остаток, $i_2 = \frac{20}{100}R_4 = 170000$ денари;
- втората отплата е $b_2 = a - i_2 = 350000 - 170000 = 180000$ денари;
- третиот остаток е $R_3 = R_4 - b_2 = 670000$ денари;
- третата камата е $i_3 = \frac{20}{100}R_3 = 134000$ денари;
- третата отплата е $b_3 = a - i_3 = 350000 - 134000 = 216000$ денари;
- четвртиот остаток е $R_2 = R_3 - b_3 = 454000$ денари;
- четвртата камата е $i_4 = \frac{20}{100}R_2 = 90800$ денари;
- четвртата отплата е $b_4 = a - i_4 = 350000 - 90800 = 259200$ денари;
- петтиот остаток е $R_1 = R_2 - b_4 = 194800$ денари;
- петтата камата е $i_5 = \frac{20}{100}R_1 = 38960$ денари;
- петтата отплата е $b_5 = a_1 - i_5 = 233760 - 38960 = 194800$ денари, затоа што последниот ануитет се разликува или пак може директно со $b_5 = Z - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 194800$ денари.

Соодветната табела за амортизација на заемот е:

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	1000000	200000	150000	350000
2	850000	170000	180000	350000
3	670000	134000	216000	350000
4	454000	90800	259200	350000
5	194800	38960	194800	233760
сума	3168800	633760	1000000	

И овде треба да се изврши проверка на амортизациониот план и тоа:

услов 1. Збирот на сите отплати треба да е еднаков со заемот $\sum b_j = Z$;

услов 2. Последната отплата треба да е еднаква на последниот остаток, $b_n = R_1$;

услов 3. Заокружениот ануитет е збир на секоја камата и соодветната отплата, $a = b_j + i_j$, освен последниот кој е еднаков на збирот на ануитетниот остаток и соодветната камата. ♦

2. Состави амортизационен план за последните четири периоди, за заем кој се амортизира за три години, со заокружени тримесечни ануитети, каматна стапка $8\%\ p.a.(d)$ и тримесечно вкаматување. Заокружениот ануитет е 10000 денари.

Треба да го определиме заемот, за да го имаме и првиот остаток. Кај заокружените ануитети $a = \frac{p_1}{100}Z$, па имаме потреба од процентот p_1. Важи неравенството $100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}$.

Во овој случај, имаме вкупно $nm = 12$ периоди, каматен фактор $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$, а оттука $100\frac{1{,}02^{12}(1{,}02-1)}{1{,}02^{12}-1} < p_1 < 100\frac{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}{1{,}02^{11}-1}$, односно $9{,}46 < p_1 < 10{,}22$. Тогаш, $p_1 = 10\%$ од каде следува дека $Z = \frac{100}{p_1}a = 100000$ денари. Ануитетниот остаток е:

$$a_1 = \left[100000 - 10000\frac{1{,}02^{11}-1}{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}\right]1{,}02^{12} = 2703{,}28 \text{ денари.}$$

За да дојдеме до последните четири отплати, да ја определиме првата $b_1 = a - i_1 = 10000 - \frac{8}{400}\cdot 100000 = 8000$. Сега, од фактот што отплатите се членови на геометриска прогресија, добиваме:

$b_9 = b_1r^8 = 8000\cdot 1{,}02^8 = 9373{,}27$,$b_{10} = b_1r^9 = 8000\cdot 1{,}02^9 = 9560{,}74$,

$b_{11}=b_1r^{10}=8000\cdot 1{,}02^{10}=9751{,}96$, а последната отплата не е член на прогресија, па мора да се пресмета поинаку. Имено, еден начин е од формулата $a_1=b_{12}r$, односно $b_{12}=\frac{a_1}{r}=2650{,}27$ денари. Иако, можно е да дојдеме до последната отплата и постепено. Да го определиме остатокот по осум исплатени ануитети , директно намалувајќи го заемот за првите осум отплати:

$$R_4=Z-\left(b_1+b_1r+b_1r^2+...+b_1r^7\right)=Z-b_1\frac{r^8-1}{r-1}$$

$$=100000-8000\frac{1{,}02^8-1}{1{,}02-1}=31336{,}24 \text{ денари.}$$

Да го составиме сега амортизациониот план за последните четири периоди.

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
9	31336,24	627,72	9373,27	10000
10	21962,7	493,54	9560,24	10000
11	12401,7	248,04	9751,96	10000
12	2650,27	53	2650,27	2703,28

Задачи за самостојна работа

1. За кое време, заем од 60000 денари ќе се амортизира со заокружени годишни ануитети од 4000 денари со годишна каматна стапка $4\%\,p.a.(d)$ и годишно вкаматување. Пресметај ги последниот ануитет и последната отплата, а потоа состави амортизационен план.

2. Да се состави амортизационен план на заем од 20000 денари, со годишна каматна стапка од $4\%\,p.a.(d)$, кој се амоританизира за четири години со полугодишни ануитети заокружени на 3000 денари, со полугодишно вкаматување.

3. Заем од 8000 денари се амортизира со годишни ануитети кои изнесуваат 35% од заемот, со каматна стапка $5\%\,p.a.(d)$ и годишно вкаматување. Состави амортизационен план и пресметај го последниот ануитет.

4. Состави амортизационен план за заем од 200000 денари, кој треба да се амортизира за четири години, со годишни заокружени ануитети, со каматна стапка $4\%\,p.a.(d)$ и годишно вкаматување.

5. Заем се амортизира за три години со заокружени полугодишни ануитети. Вкаматувањето е полугодишно со каматна стапка $4\%\, p.a.(d)$. Состави амортизационен план доколку последната отплата е 1265,51 денар.

9. 9. Задачи за вежбање

1. Заем од 240000 денари се амортизира за 4 години, со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Колкав е ануитетот, ако каматната стапка е $9\%\, p.a.(d)$? Колкава е вкупната пресметана камата?

2. Подигнати се два заеми, секој од нив со еднакви ануитети. Првиот заем од 160000 денари се амортизира за 4 години, а вториот за 6 години. Колкав е вториот заем ако и двата заеми се амортизираат со полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување со иста каматна стапка $4\%\, p.a.(d)$?

3. Еден заем е за 100000 денари поголем од друг. Првиот се амортизира за 12 години, со еднакви годишни ануитети по 20000, а другиот за 10 години, исто така со еднакви годишни ануитети. Колкав е ануитетот на вториот заем, ако за двата заеми е применета каматна стапка од $5\%\, p.a.(d)$? Забелешка: $Z_1 = Z_2 + 100000$.

4. Заем се амортизира за 9 години, со еднакви четиримесечни ануитети и четиримесечно вкаматување. Каматната стапка е $12\%\, p.a.(d)$, а разликата на петтата и втората отплата е 12000 денари. Пресметај го ануитетот.

5. Заем се амортизира со еднакви месечни ануитети и месечно вкаматување, во текот на две години. Каматната стапка е $24\%\, p.a.(d)$, а последната камата изнесува 300 денари. Пресметај ги ануитетот и заемот.

6. Четвртата отплата на заемот кој се амортизира во текот на 6 години, со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување, со каматна стапка од $10\%\, p.a.(d)$, изнесува 34038,22 денари. Пресметај го заемот, остатокот на долгот, на половина на рокот на отплата и вкупната пресметана камата.

7. Заем од 200000 денари се амортизира за 26 години, со ануитети кои се плаќаат секоја втора година, со каматна стапка $8\%\, p.a.(d)$, со двегодишно вкаматување. Колкав дел од долгот е отплатен со ануитетите од шестиот до единаесеттиот?

8. Заем се амортизира за 10 години, со еднакви квартални ануитети и со квартално вкаматување, со каматна стапка $16\%\, p.a.(d)$. После отплатени 25 ануитети, долгот е намален за 4000 денари. Колкав е заемот?

9. Заем се амортизира за 10 години, со еднакви полугодишни ануитети и со полугодишно вкаматување, со каматна стапка $10\%\, p.a.(d)$. Со ануитетите, почнувајќи од единаесеттиот и петнаесеттиот, долгот е исплатен во износ од 10000 денари. Колкав е заемот, а колкав е преостанатиот долг после петнаесеттиот ануитет?

10. Седмата по ред пресметана камата, за долг кој се амортизира со полугодишни ануитети и каматна стапка од $6\%\,p.a.(d)$, со полугодишно вкаматување е 130727 денари. Пресметај го заемот и остатокот од долгот после седум платени ануитети.

11. Заем се амортизира за $12{,}5$ години, со тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување, со каматна стапка $32\%\,p.a.(d)$. По отплатени 40 ануитети, остатокот од долгот е 20000 денари. Колкав е заемот, а колкав ануитетот?

12. За кое време, со ануитети од 40000 денари, ќе се амортизира заем од 1000000 денари, со каматната стапка $6\%\,p.a.(d)$. Ануитетите се полугодишни како и вкаматувањето.

13. Заем се амортизира со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Најди го заемот, ако првата отплата е 200000 денари, каматата во последната година година е $11576{,}25$ денари, а каматата во претпоследниот период е $22601{,}25$ денари.

14. Заем од 630182 денари се амортизира со тримесечни ануитети и исто такво вкаматување. За колку периоди ќе се амортизира заемот, ако првата отплата е 100000 денари, а каматната стапка е $8\%\,p.a.(d)$?

15. Заем од 509776 денари се амортизира за 3 години, со еднакви месечни ануитети и месечно вкаматување. Колкава е каматната стапка, ако ануитетот е 20000 денари?

16. Заем се амортизира со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Колкава е каматната стапка ако збирот на третата и втората отплата е 20604 денари, а разликата на четвртата и втората отплата е 412 денари?

17. Заем се амортизира со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување, со каматна стапка $6\%\,p.a.(d)$. Најди го заемот ако останатиот дел од заемот по три платени ануитети е $14720{,}17$ денари, а останатиот дел од заемот по шест платени ануитети е $11164{,}76$ денари.

18. Заем од 300000 денари се амортизира за 10 години, со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Годишната каматната стапка е $6\%\,p.a.(d)$. Пресметај го ануитетот и отплатениот дел и остатокот од заемот заклучно со шестата година.

19. Заем се амортизира за три години, со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување и каматна стапка $6\%\,p.a.(d)$. Состави амортизационен план, ако првата отплата е $77298{,}75$ денари.

20. Заем се амортизира со еднакви месечни ануитети и месечно вкаматување. Каматната стапка е $12\%\,p.a.(d)$. Состави амортизационен план за првите четири исплати, ако каматата во вториот месец е $87497{,}33$, а првата отплата е 10000 денари.

21. Заем се амортизира за три години, со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување. Каматната стапка е $8\% \, p.a.(d)$. Состави амортизационен план за последните три периоди, ако каматата во третиот период е $4556{,}84$ денари.

22. Заем се амортизира со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување со каматна стапка $4\% \, p.a.(d)$. Состави амортизационен план за заемот, ако остатокот од заемот по еден платен ануитет е $176652{,}92$ денари, а остатокот на заемот по два платени ануитети е $135052{,}91$ денар.

23. Заем од 80000 денари се амортизира со заокружени тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување, со каматна стапка $8\% \, p.a.(d)$. За колку периоди ќе се амортизира заемот, ако заокружениот ануитет е 18000 денари, а првата отплата е 1000 денари?

24. Заем се амортизира со годишни заокружени ануитети. Вкаматувањето е годишно, а каматната стапка $3\% \, p.a.(d)$. Најди го ануитетниот остаток, ако третата отплата е 10609 денари, а отплатениот дел после претпоследниот ануитет е 185989 денари.

25. Заем се амортизира за четири години, со заокружени тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување, со каматна стапка $12\% \, p.a.(d)$. Најди го ануитетниот остаток, ако каматата во претпоследниот период е $921{,}17$ денари.

26. Состави амортизационен план за заем од 120000 денари којшто се амортизира за пет години, со заокружени годишни ануитети и каматна стапка од $4\% \, p.a.(d)$, со годишно вкаматување.

27. Заем од 100000 денари се амортизира за 18 години, со заокружени полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Состави амортизационен план за последните три години, ако каматната стапка е $4\% \, p.a.(d)$.

28. Заем од 20000 денари се амортизира за две години, со заокружени тримесечни ануитети од 3000 денари. Состави амортизационен план, ако вкаматувањето е тримесечно.

29*. Заем се амортизира со заокружени годишни ануитети за четири години. Состави амортизационен план, ако отплатениот дел после три години е $81161{,}6$ денари, првата отплата е 26000 денари, а вкаматувањето е годишно.

30*. Заем се амортизира за 8 години, со заокружени полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Состави амортизационен план за последните три години, ако каматната стапка е $4\% \, p.a.(d)$, а последната отплата е $4984{,}27$ денари.

31. Колкав е ануитетот за заем од 500000 денари, кој треба да се амортизира за 30 години, со каматна стапка $2{,}8\% \, p.a.(d)$, со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување?

32*. Колкав е заемот кој треба да се амортизира за 30 години, со каматна стапка $2,8\% \, p.a.(d)$, со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување, ако првата отплата е $5372,22$?

33*. Заем се амортизира за 50 години, со $4\% \, p.a.(d)$ камата и годишно вкаматување, со еднакви годишни ануитети. Пресметај ги ануитетот и заемот, ако отплатениот дел по 20 ануитети е $58515,66$ денари.

34*. За кое време, заем од 2400000 денари, ќе се амортизира со заокружени семестрални ануитети од 120000 денари, со $2\% \, p.a.(d)$ камата и семестрално вкаматување? Колкав е последниот ануитет?

Тематски преглед

Заемот претставува привремена услуга од страна на доверителот кон должникот, односно договор за отстапување на финансиски средства на корисник, кој истите може да ги користи, и во определен рок да ги врати. Сумата со која се отплаќа заемот во секој период, се нарекува **отплата**, а отплатата, заедно со каматата за определениот период, се нарекува **ануитет**. Временски период, за кој се врши секоја поединечна отплатата на заемот, е **период на амортизација**.

- според времето на исплата на ануитетите, разликуваме заеми **со декурзивни ануитети** (исплатата се врши декурзивно, на крајот на поединечните периоди на исплата) и **со антиципативни ануитети** (исплатата се врши антиципативно, на почетокот на периодот на исплата).
- според начинот на пресметување на каматата, разликуваме заеми **со декурзивно вкаматување** и **со антиципативно вкаматување**.

Амортизацијата на заемот, како што се нарекува постепеното отплатување на заемот според однапред определени износи, во определени временски интервали, се реализира по однапред утврден план, кој се нарекува **амортизационен план**.

Заемот Z, кој треба да се отплати со n еднакви ануитети, секој од нив со износ a, каматна стапка p и декурзивно вкаматување, при што периодот на вкаматувањето се совпаѓа со периодот на исплата на ануитетите се пресметува по формулата:

$$\boxed{Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$$

каде што r е декурзивниот каматен фактор.

Кога е познат заемот, за пресметување на ануитетот добиваме:

$$\boxed{a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}.$$

Ако $k-$тата отплата ја бележиме со b_k, а $k-$тата камата со i_k, тогаш првиот ануитет е $a = b_1 + i_1$, каде првата камата $i_1 = \frac{Zp}{100}$ се пресметува на целиот заем Z.

Разгледувајќи го секој од поединечните ануитети, доаѓаме до општата формула $a = b_n + i_n$, каде n-тата камата i_n се пресметува за преостанатиот дел од долгот $Z - b_1 - b_2 - ... - b_{n-1}$, односно $\boxed{i_n = \frac{(Z - b_1 - b_2 - ... - b_{n-1})p}{100}}$.

Отплатите на заемот формираат геометриска прогресија, со прв член, првата отплата, b_1 и количник, каматниот фактор, r и притоа $\boxed{b_k = b_1 r^{k-1}}$.

Во општ случај, $k-$тата отплата изразена преку заемот се пресметува со формулата:

$$\boxed{b_k = Z\frac{r-1}{r^n-1}r^{k-1}},$$

а изразена преку ануитетот со $\boxed{b_k = \frac{a}{r^{n-k+1}}}$.

Отплатениот дел од заемот за k периоди, заклучно со $k-$тиот ануитет, O_k е збирот на првите k отплати $O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$, односно

$$\boxed{O_k = b_1\frac{r^k-1}{r-1}}.$$

Делот од заемот кој останува да се отплати после $k-$тиот ануитет, се бележи со R_{n-k} и за него имаме:

$$\boxed{R_{n-k} = b_1\frac{r^n-r^k}{r-1}}, \text{ односно } \boxed{R_{n-k} = a\frac{r^n-r^k}{r^n(r-1)}}.$$

Доколку се изрази рокот на амортизација n, преку заемот и ануитетот тогаш,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a-Z(r-1)}}.$$

Кога заем од Z денари, се амортизира со еднакви ануитети, тогаш на крајот на секој период, должникот треба да плати еднакви износи кои се состојат од два дела, дел за отплата на долгот и дел за камата за преостанатиот долг. Амортизациониот план се изработува како во следната табела.

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	Z	$i_1 = {}^{Zp}\!/_{100}$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = {}^{R_{n-1}p}\!/_{100}$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = {}^{R_2 p}\!/_{100}$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = {}^{R_1 p}\!/_{100}$	$b_n = a - i_n$	a

По направениот амортизационен план, потребно е да извршиме проверка за точност на амортизациониот план:

услов 1. Збирот на сите отплати треба да е еднаков со заемот $\sum b_j = Z$;

услов 2. Последната отплата треба да е еднаква на последниот остаток, $b_n = R_1$;

услов 3. Збирот на колоната камати и колоната отплати треба да е еднаков на производот на бројот на периоди на амортизација и ануитетот, $\sum i_j + \sum b_j = na$;

услов 4. Ануитет е збир на секоја камата и соодветната отплата, $a = b_j + i_j$;

услов 5. Збирот на колоната камати е еднаков на каматата пресметана на збирот на колоната заем остаток, $\sum i_j = \frac{p}{100} \sum R_j$.

Ануитетот a, на определен заем, може да биде зададен во конкретен износ или пак како процент од заемот. Овие ануитети најчесто се заокружуваат на цели броеви (десетки, стотки и сл.), а оттука се нарекуваат и **заокружени ануитети**, а заемите се **заеми со заокружени ануитети**. Доколку ануитетот не е зададен на еден од горе наведените начини, а постои услов заемот да се амортизира со заокружени ануитети, тогаш е потребно да се пресмета процентот за пресметување на ануитетот. И овде ќе зборуваме за декурзивни заеми, со отплата на крајот на периодот на амортизација и со декурзивно пресметување на каматата.

Нека се дадени висината на заемот Z, каматната стапка $p\%\ p.a.(d)$. Ако е познат бројот на периодите на амортизација, тогаш се бара процент p_1 кој се наоѓа меѓу $100V_p^n$ и $100V_p^{n-1}$, што произлегува од фактот дека треба да се извршат $n-1$ отплата со еднакви ануитети и $n-$тата отплата со ануитет a_1 помал од останатите. Заокружените ануитети се поголеми од еднаквите ануитети, па последниот ануитет е различен од останатите, помал од нив и се вика **ануитетен остаток**.

Значи, доколку не го знаеме заокружениот ануитет, тој се изразува во процент p_1 од заемот, најчесто цел број, или со формула $\boxed{a = \frac{p_1 Z}{100}}$, при што важи

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}}.$$

Притоа, последниот ануитет се разликува од заокружениот, се нарекува и **ануитетниот остаток** и се пресметува со формулата

$$\boxed{a_1 = \left[Z - a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right] r^n}.$$

Изработувањето на амортизациониот план за заем со заокружени ануитети, е на истиот начин како кај заеми со еднакви ануитети, освен во последен ред, каде се запишува последниот различен ануитет. Притоа и последната отплата е помала од останатите. Прво е неопходно да се пресметаат потребните величини, а потоа се пополнува амортизационата табела.

И овде треба да се изврши проверка на амортизациониот план и тоа:

услов 1. Збирот на сите отплати треба да е еднаков со заемот $\sum b_j = Z$;

услов 2. Последната отплата треба да е еднаква на последниот остаток, $b_n = R_1$;

услов 3. Заокружениот ануитет е збир на секоја камата и соодветната отплата, $a = b_j + i_j$, освен последниот кој е еднаков на збирот на ануитетниот остаток и соодветната камата. ♦

Решенија и одговори на задачите

1.1.

1. а) 18750 денари; б) 937,5 денари; в) 260,4 денари по $(30,360)$ и 256,85 денари по $(k,365)$. **2**. 20 години. **3**. 5%. **4**. а) 14750 денари; б) 87500 денари. **5**. $K = K_1 + K_2 = 108000$ денари. **6**. 2691 денари.

1.2.

2. $I = 12000$, $K = 72000$ денари. **3**. $I = 1760$, $K = 35200$ денари. **4**. 70400 денари. **5**. $K = 33750$ денари, $I = 150$ денари. **6**. Долг 260400 денари, камата 65100 денари. **7**. Долг 10568 денари, камата 568 денари.

1.3.

4. 75 денови. **5**. 5 месеци и 20 дена. **6**. а) 50 дена, 4.05; б)13 дена, 4.05. **7**. 29 дена, 2.05. **8**. 23.04. **9**. 7.05.

1.4.

2. 123 денови. **3**. 69 денови или 13.06. **4**. 25.02. **5**. 8.05, за 28 дена со стартен датум 10.04.

1.5.

4. *Dk* = 21,875 денари; *Dr* = 21,685 денари; разлика = 0,1897. **5.** $ 1 195 168,66

1.6.

4. 3 166. **5.** уплати на 31.12. изнесуваат 17 976,1 денари; исплати = 15 200 денари; камата = 922 денари; салдо = 2 776 денари.

1.7.

5. Редовна камата = 320,9 денари, казнена камата = 27,30;
салдо на изедначување = 49.651,8 денари.

1.8.

1. 826 денови (или 2 години, 3 месеци и 6 дена). **2**. $K = 176147$ денари. **3**. $p = 4{,}64\%$. **4**. $K = 306748$ денари. **5.** $K = 300000$ денари. **6**. 18000 денари. **7**. $K = 105680$ денари, $I = 5680$ денари. **8**. 10.04 со 61,3%. **9**. за 246 дена. **10**. 13.06.

11. дисконт = 2222,22 ефективна сума =$ 247 797,36.

12. ефективна сума = $ 2 984 200. **13.** ефективна сума = 147 546 денари, Dk = 2 287,5 денари. **14.** $ 147 192. **15.** 63 дена. **16.** 2 471 денари. **17.** уплата = 79 770 денари; исплата = 65 000 денари; салдо = 14 770 денари; камата = 1 770 денари.

18. редовна камата = 4.248 денари, казнена камата = 62,46 денари; салдо на израмнување = 25.689,54.

2.1.

2. а) 80 дела; б) 130 дела. **4**. а) 80 грејни; б) 5040 грејни. **5**. а) 23 карати 1 грејн; б) 16 карати 1 грејн; в) 232 пенивејти 11 грејни; г) 209 пенивејти 16 грејни.

2.2.

1. $W\,80,,9,6$. **2**. 979,17 ‰. **3**. 640 ‰. **4**. а) 600 ‰; б) $W\,7,,2,4$. **5**. а) 420 ‰; б) $W\,121,,4,8$.

2.3.

1. $158{,}4g$. **2**. $498{,}75g$. **3**. $700g$. **4**. $384g$.

2.5.

5. 5,5% пораст на евро и 5,1% пад на долар **6**. Девалвација, 46,3% **7.** 1,383

2.8.

4. 144.000 УСД **5**. 68.493.

2.9.

5. 0,694 - 0,6849

2.10.

1. 225 EUR **2**. Загуба 3.000 МКД

2.11.

1. Во 14 часот +20 EUR, во 19 часот -8 EUR **2.** Просечен курс 1,041 профит 767,5 CHF. **3.** 100 МКД. **4.** 17 000 USD. **5.** во 15 часот.

2.12.

1. $W\,2,,1,28$. **2**. 600 ‰. **3**. 881,25 ‰. **4**. а) 800 ‰; б) $W\,30$. **5**. $117{,}5g$. **6**. $296g$. **7**. 870 ‰. **8**. 180 пенивејти. **9**. +1,65% -1,57% **10**. Депресијација, 21,9% **11**. 1,3965. **12.** Во 14 часот: профит 48 EUR, во 19 часот: загуба 24 EUR **13.** Просечен курс 1,64, профит (изразено во AUD 1454, изразен во EUR 889).

3.1.

2. а) 2^{x+y}, б) 2^{-x}, в) 132^{x}, г) 10^{xy}. **3.** а) $3^{x}=9^{x/2}$, б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}>\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x<0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x=0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}<\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x>0$. **4.** а) $x<y$, б) $x>y$, в) $x<y$. **5.** а) $4^{x}-9^{x}$, б) $25^{x}+25^{-x}-2$, в) $64^{x}+3\cdot 16^{x}+3\cdot 4^{x}+1$.

3.2.

1. а) $x=-3$, б) $x=0$, в) $x=8$, г) $x=-3$, д) $x_1=4$, $x_2=-1$, ѓ) $x=2$. **2.** а) $x=8$, б) $x=2$, в) $x=-15$ г) $x=-6$. **3.** а) $x_1=1$, $x_2=0$, б) $x=0$, в) $x=-2$. **4.** а) $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=0$, б) $x_1=2$, $x_2=-1$, в) $x_1=-1$, $x_2=6$. **5.** а) $x=4$, б) $x_1=-1$, $x_2=-\frac{3}{2}$, в) $x_1=3$, $x_2=2$.

3.3.

1.

Поими	$\log_6 216=3$	$\log_x \frac{4}{9}=2$	$\log_{\sqrt{7}} 49=4$	$\log_a(b+2)=5$	$\log_{25}5=\frac{1}{2}$
Логаритам	3	2	4	5	$\frac{1}{2}$
Основа на логаритамот	6	x	$\sqrt{7}$	a	25
Логаритмант	216	$\frac{4}{9}$	49	$b+2$	5

2. а) –2, б) 2, в) $\frac{1}{2}$, г) $-\frac{1}{2}$. **3.** а) $x=\sqrt{3}$, б) $x=6$, в) $x=-2$, г) $-2{,}1$. **4.** а) 2, б) 9. **5.** а) 1, б) 30, **6.** $x\in(-\infty,0)\cup(1+\infty)$.

3.4.

1. а) $\log x=\log 3+\log a+\log b$, б) $\log x=2\log a+\log b+5\log c$, в) $\log x=-\log 2+\log a+\log b-\log c$, г) $\log x=\log 2+\log(a-b)$, д) $\log x=\frac{1}{2}\log a-\log(b^2-c^2)$, ѓ) $\log x=\frac{1}{2}\log a+\frac{1}{3}\log b$. **2.** а) $-\frac{1}{2}$, б) -18, в) 1. **3.** а) $x=10$, б) $x=\frac{8}{9}$, в) $x=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{2}}$, г) $x=\sqrt[4]{\frac{4^6}{3^4}}$, д) $\frac{5}{3}$, ѓ) $\frac{8}{27}$, е) $\sqrt[3]{6}$, ж) 24. **4.** а) 0,60; 0,78; 0,90; 0,96; б) 1,08; 1,20; 1,26. **5.** а) –3, б) 3, в) –1, г) –1.

3.5.

2 . Упатство: а) $\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1=\log_3 7\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 7}\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}+1$,

б) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=\log_3 2\cdot\frac{1}{\log_3 4}\cdot\log_5 4\cdot\frac{1}{\log_5 6}\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 7}\cdot\frac{\log_5 7}{\log_5 8}$.

3. 8. **4.** а) $-\frac{1}{2}$, б) 18, в) $\sqrt{5}$. 5. $\log_b a=\log_{\left(\frac{1}{b}\right)^{-1}} a=-\log_{\frac{1}{b}} a$.

3.6.

1. $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **2.** $x_1=4,\ x_2=1$. **3.** $x=2$. **4.** $x_1=7,\ x_2=\frac{16}{3}$. **5.** $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. **6.** $x=16$. **7.** 4.

3.7.

1. а) $x=y$, б) $x>y$, в) $x<y$. **4.** а) $a^{\frac{4}{3}}$, б) $a^{\frac{2}{3}}$. **5.** $x=8$. **6.** $x=2$. **7.** ѓ. **8.** $x=1$. **9.** $x=1$. **10.** 4. **11.** а) $x=4$, б) $x=\frac{1}{81}$, в) $x=\frac{1}{10}$, г) $x=\frac{1}{2}$, д) $\sqrt[5]{100}$, ѓ) $x=2$.

12. а) $\log 2+\log x+\log y$, б) $\log 3+2\log x+3\log y$, в) $2\log x+5\log y+\frac{1}{2}\log z$ г) $\sqrt{b}\,\log a+3\log c$, д) $\log 6+\log x+\frac{2}{3}\log y$, ѓ) $\frac{1}{2}(\log 2+\log x)+\frac{1}{4}(3\log x+\frac{1}{2}\log y)$, е) $\frac{1}{2}(\log x+\frac{3}{4}\log y)$. **13.** а) $x=6$, б) $x=10$, в) $x=21$, г) $x=1125$. **14.** а) $x\approx 6{,}73$; б) $x\approx 0{,}00884$; в) $x\approx 76{,}296$. **15.** а) $2\log_4 5$, б) $\frac{2}{\log_{\sqrt{7}} 3}$, в) $-\log_{\frac{1}{10}} 5$. **16.** а) $\frac{1}{35}$, б) $\log_2\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. **17.** а) 8 б) 1. **18.** $x=1$. **19.** $x=5$. **20.** $x=25$. **21.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$. **22.** $x=7$. **23.** $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=10$.

4.1.

1.

Степени	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Радијани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. $\sin\beta=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $tg\beta=\frac{12}{5}$, $ctg\beta=\frac{5}{12}$. **3.** $\sin\beta\approx 0{,}87$, $\cos\beta\approx 0{,}49$,, $tg\beta\approx 1{,}77$, $ctg\beta\approx 0{,}56$. **4.** $\sin\alpha=0{,}8$,, $\cos\alpha=0{,}6$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$. **5.** $\sin\alpha\approx 0{,}78$, $\cos\alpha\approx 0{,}62$, $tg\alpha\approx 1{,}26$, $ctg\alpha\approx 0{,}79$.

4.2.

1. а) 0,54, б) 0,98, в) 0,84, г) 0,54. **2.** а) 60^0, б) 70^0, в) 15^0, г) 40^0. **3.** а) 1, б) 1, в) 1. **4.** а) 3, б) $-\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$, в) 1. **5.** а) 45^0, б) 30^0, в) 45^0, г) 60^0, д) 30^0.

4.3.

1. а) $\sin 48^0\approx 0{,}74$, $\cos 48^0\approx 0{,}67$, $tg48^0\approx 1{,}11$, $ctg48^0\approx 0{,}9$, б) $\sin 23^0 12^{'} 23^{''}\approx 0{,}39$, $\cos 23^0 12^{'} 23^{''}\approx 0{,}92$, $tg23^0 12^{'} 23^{''}\approx 0{,}43$, $ctg23^0 12^{'} 23^{''}\approx 2{,}33$, в) $\sin 16{,}19^0\approx 0{,}28$, $\cos 16{,}19^0\approx 0{,}96$, $tg16{,}19^0\approx 0{,}29$, $ctg16{,}19^0\approx 3{,}44$, **2.** а) $\sin\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}78$, $\cos\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}62$, $tg\frac{2\pi}{7}\approx 1{,}25$, $ctg\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}8$, б) $\sin\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $\cos\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $tg\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}93$, $ctg\frac{5\pi}{21}\approx 1{,}08$. **3.** а) $35^0 42^{'} 20^{''}$, б) $44^0 25^{'} 23^{''}$, в) $67^0 32^{'} 3^{''}$, г) $26^0 23^{'} 16^{''}$, д) $44^0 24^{'} 55^{''}$, ѓ) $72^0 53^{'} 50^{''}$. **4.** а) 0,01, б) $-0{,}2$. **5.** а) $25^0 55^{'} 39^{''}$, б) $17^0 26^{'} 14^{''}$, в) $46^0 12^{'} 59^{''}$.

4.4.

1. а) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $tg\alpha=\frac{5}{12}$, $ctg\alpha=\frac{12}{5}$, б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $tg\alpha=\sqrt{15}$, $ctg\alpha=\frac{\sqrt{15}}{15}$, в) $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha=\frac{5\sqrt{41}}{41}$, $ctg\alpha=\frac{5}{4}$, г) $\sin\alpha\approx0{,}92$, $\cos\alpha\approx0{,}39$, $tg\alpha\approx2{,}44$, **2.** а) $\sin^2\alpha$, б) $-\cos^2\alpha$, в) 1. **6.** $\frac{55}{54}$. **7.** $6\sqrt{2}$.

4.5.

1. а) $\beta=53{,}8^0$, $a=40{,}1cm$, $b=54{,}9cm$, б) $\beta=74{,}2^0$, $a=11{,}7cm$, $b=3{,}3cm$, в) $\beta=24{,}6^0$, $b=5{,}14cm$, $c=5{,}65cm$. **2.** а) $\beta=8^0$, $a=1750{,}4cm$, $c=1767{,}6cm$, б) $\alpha=41^0\,30^{'}$, $a=66{,}1cm$, $c=99{,}7cm$, в) $\beta=66^0$, $b=11{,}79cm$, $c=5{,}25cm$. **3.** а) $\alpha=45^0\,57^{'}\,5^{''}$, $\beta=42^0\,2^{'}\,55^{''}$, $b=224{,}48cm$, б) $\alpha=61^0\,55^{'}\,39^{''}$, $\beta=28^0\,4^{'}\,21^{''}$, $c=59{,}5cm$, в) $\alpha=21^0\,19^{'}\,47^{''}$, $\beta=68^0\,40^{'}\,13^{''}$, $c=338{,}16cm$. **4.** $45^0\,14^{'}\,23^{''}$. **5.** $36^0\,52^{'}\,12^{''}$. **6.** Од местото B авионот е на растојание $4182{,}78m$, а растојанието меѓу A и B е $1223m$.

4.6.

1. а) $34^0\,24^{'}\,36^{''}$, б) $18^0\,16^{'}\,12^{''}$, в) $23^0\,40^{'}\,12^{''}$. **2.** а) $36{,}43^0$, б) $45{,}19^0$, в) $73{,}87^0$. **3.** а) $0{,}44rad$, б) $1{,}49rad$. **4.** а) 105^0, б) $72^0\,45^{'}\,56^{''}$. **5.** а) 0, б) 2, в) $\frac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq0$, **6.** а) 65^0, б) $47^0\,10^{'}$, в) 30^0, г) 40^0. **7.** а) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, б) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, в) $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$, $ctg\alpha=\frac{5}{3}$, г) $\sin\alpha=\frac{25}{\sqrt{674}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{674}}$, $tg\alpha=\frac{25}{7}$. **8.** а) 7, б) -1. **9.** а) $\beta=53^0\,58^{'}$, $a\approx40$, $b\approx55$, б) $\alpha=25^0\,40^{'}$, $b\approx936{,}43$, $c\approx1038{,}94$, в) $\alpha=4^0\,50^{'}$, $a\approx0{,}05$, $c\approx0{,}622$, г) $\alpha=45^0\,57^{'}\,5^{''}$, $\beta=44^0\,2^{'}\,55^{''}$, $b\approx222{,}48$, д) $\alpha=84^0\,44^{'}\,6^{''}$, $\beta=5^0\,15^{'}\,54^{''}$, $a\approx42{,}32$. **10.** $b=a\pm2c\cdot\cos\alpha$, $h=c\sin\alpha$. **11.** $2\,410m$.

5.1.

1. а) II-квадрант, б) I-квадрант, в) IV-квадрант, г) III-квадрант, д) $x-$оската, ѓ) $y-$оската, е) $x-$оската, ж) $y-$оската. **2.** $M(1,0)$, $N(-2,0)$, $P(5,0)$, $Q(-3,0)$. **3.** $M(0,3)$, $N(0,4)$, $P(0,-2)$, $Q(0,-1)$. **4.** $m_x=4$, $m_y=2$.

5.2.

1. а) $d=\sqrt{82}$, б) $d=4$, в) $d=3\sqrt{5}$, г) $d=3\sqrt{5}$. **3.** $y=11$ или $y=-1$. **4.** $C(21,18)$. **5.** 13.

5.3.

1. $S_{AB}\left(4,-\frac{5}{2}\right)$, $S_{BC}(2,1)$, $S_{AC}\left(1,-\frac{7}{2}\right)$. **2.** 5. **3.** $(-1,-1)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(5,2)$. **4.** а) $\left(5,\frac{9}{5}\right)$, б) $\left(6,\frac{11}{5}\right)$, в) $(-7,-3)$, г) $(18,7)$. **5.** $A(-2,-6)$, $B(8,2)$, $C(-6,10)$.

5.4.

1. $P=21$. **2.** Не. **3.** Да. **4.** $P=15$. **5.** $P=\frac{55}{2}$. **6.** $P_{APB}=\frac{15}{2}$, $P_{PBC}=\frac{9}{4}$.

5.5.

1. Само P е од правата. **2.** а) $y=x$, б) $y=-x$, в) $y=0$. **3.** а) $k=2$, $m=-3$, б) $k=-1$, $m=3$, в) $k=0$, $m=-2$, г) $k=\sqrt{3}$, $m=0$. **4.** $y=\sqrt{3}x-\frac{1}{2}$. **5.** $y=-x-1$. **6.** $k=-\frac{6}{5}$, $m=\frac{7}{5}$. **7.** $y=-5x+2$.

5.6.

1. а) $2x-3y-3=0$ б) $y+4=0$ в) $x-3=0$. **2.** а) $k=2$, $m=3$, б) $k=\frac{5}{2}$, $m=\frac{3}{2}$, в) $k=-\frac{3}{8}$, $m=-\frac{16}{3}$. **3.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, $m=3$. **5.** Да.

5.7.

1. а) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1$, 4 единици на $x-$оската, 6 единици на $y-$оската, б) $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, 1 единици на $x-$оската, 1 единици на $y-$оската, в) $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-2}=1$ $\frac{1}{2}$ единици на $x-$оската, 1 единици на $y-$оската. **2.** $k=\frac{6}{85}$. **3.** $k=\pm\frac{5}{12}$. **4.** 18 квадратни единици. **5.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$.

5.8.

1. а) $y+3=k(x-2)$, б) $y-4=k(x+1)$. **2.** $3x+y+5=0$. **3.** $x+y+3=0$. **4.** а) $k=-\frac{7}{5}$, б) $k=-5$, в) $k=0$. **5.** $7x+5y-13=0$. **6.** Не. **7.** $d=\frac{7}{5}$, не. **8.** $d=\frac{2}{3}$. **9.** $d_M=\frac{10}{\sqrt{5}}$ и $d_N=\frac{8}{\sqrt{5}}$. **10.** $x+y=7\pm5\sqrt{2}$.

5.9.

1. а) се сечат во точката $(1,2)$, б) се паралелни, в) се совпаѓаат. **2.** а) $(5,0)$ и $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, б) $(-6,0)$ и $(0,4)$. **3.** $5x-6y+28=0$. **4.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **5.** $2x+y-4=0$. **6.** $5x+3y-60=0$.

5.10.

1. $4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13})$. **2.** а) $M(7,1)$, б) $M(7,1)$. **3.** $\lambda=\frac{1}{2}$. **4.** $P=14$. **6.** $7x+10y+29=0$. **8.** $D(1,-5)$. **11.** а) $d=\frac{7}{5}$, б) $d=1$. **12.** $x-3=0$, $x-3y-7=0$, $x+3y-13=0$. **13.** а) $T(-4,0)$, б) $\text{H}(4,4)$. **15.** $M(-3,8)$. **16.** $P=49$. **17.** $4x+3y-120$, $48x+9y+72=0$. **18.** $k_1=-\frac{1}{3}$, $k_2=1$ и $k_1=-\frac{5}{3}$.

6. 1.

2. а) $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}$, б) $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25}$, в) 2,4,8,16,32, г) –1,2,–3,4,–5. **3.** а) $\frac{4}{17}$, б) 27, в) 81. **4.** n=2010. **5.** n=256. **6.** а) $\frac{3}{5}$, б) $\frac{1}{5}$, в) 16, г) 3. **7.** а) $a_n=2n+1$, б) n^2, в) $a_n=2+(-1)^n$, г) $a_n=\frac{1}{n}$, д) $a_n=\frac{8}{2^n}$.

6. 2.

3. Низата е растечка. **4.** Растечки се низите под а), г) и д), а опаѓачки се низите под б) и в). **5.** а) Не може, б) ниту растечка ниту опачачка. **6.** а) $a>1$, б) $0<a<1$, в) $a=1$.

6. 3.

1. 299. **2.** 150. **3.** –77,6. **4.** Аритметички прогресии се само под а) и в). За прогресијата под а) почетен член е 2 а разликата е 6, а за прогресијата под в) почетен член е 9 а разликата е –5. **5.** После 8 години, на 1 јануари 2008 година. **6.** $d=3$, $a_1=0$. **7.** Аритметичка прогресија. **8.** Пред да почне да штеди Јован имал 14000 денари, а секој месец заштедувал по 2500 денари.

6. 4.

1. а) 19, б) x. **2.** Бараниот член е a_{n+1}. **4.** $n(n+1)$. **5.** а) 9399, б) 5850. **6.** 50. **7.** Од $a_7+a_{11}=a_5+a_{20}$ и $a_7+a_{11}=a_5+a_{13}$ добиваме дека $a_{13}=a_{20}$, а тоа е можно само ако $d=0$.

6. 5.

1. 3. **2.** Геометриски прогресии се а) и г). Во прогресијата под а) почетниот член е 2 а количникот е –4, во прогресијата под г) почетниот член е 1, а количникот е 2. **3.** а) 10,125, б) 96. **4.** а) 50,363%, б) 12 години. **5.** Александар. **6.** 256 пати.

6. 6.

1. а) 60, б) x. **3.** Бараниот член е a_{n+1}. **4.** $b=15$ или $b=15$. **5.** а) 1640, б) 40, в) $\frac{255}{128}$, г) 340. **6.** а) 3, б) 27. **7.** $a_1=9$, $S_5=6\frac{7}{9}$.

6. 7.

2. Не. **3.** Не. **4.** 500500. **5.** 3000. **6.** 1840. **7.** $a=5,\ b=8,\ c=11$. **8.** Упатство: замени ги вредностите за a_k и a_n според формулата за општ член на една аритметичка прогресија и потоа покажи дека равенството важи. **9.** 2080 денари. **10**. 100. **11.** $b=15$. **12.** Упатство: замени ги вредностите за a_k и a_n според формулата за општ член на една геометриска прогресија и потоа покажи дека равенството важи. **13.** 1792. **14.** 20480 денари. **16.** $q=1$.

7.1

1. а) 18750 денари; б) 937,5 денари; в) 260,4 денари по $(30{,}360)$ и 256,85 денари по $(k{,}365)$. **2**. 20 години. **3**. 5%. **4**. а) 14750 денари; б) 87500 денари. **5**. $K=K_1+K_2=108000$ денари. **6.** а) $6\%p.s.$; б) $3\%p.q.$; в) $1\%p.m.$. **7.** а) $4\%p.s.$; б) $8\%p.a.$; в) $\frac{2}{3}\%p.m.$. **8.** $9{,}091\%p.a.(a)$. **9.** $11{,}11\%p.a.(d)$. **10.** $6\%p.a.(a)=6.38\%p.a.(d)$, па поповолна е втората стапка од $6{,}5\%p.a.(d)$.

7.2

1. а) Со комбиниран метод 84538 денари, само со сложена сметка 84483,43 денари; б) Со комбиниран метод 88124,3 денари, само со сложена сметка 88117,29 денари. **2.** 56331,55 денари. **3.** 59395,02 денари. **4.** 95600,58 денари. **5.** 56059,84 денари при декурзивно вкаматување, а 56400 денари при антиципативно вкаматување. **6.** 24099 денари. **7.** 17205 денари.

7.3.

1. 40642 денари. **2.** 7430 денари. **3.** а) 44160 денари; б) 43133,4 денари. Разликата во износите во задачите а) и в) доаѓа од заокружувањето. **4.** 6%. **5.** 3,923% и 1,943%. **6.** 16847 денари.

7.4.

1. а) $K=75972{,}54$ денари; б) $K=74617{,}11$ денари. **2.** а) 43291 денар; б) 42918,57 денари. **3.** 250237,95 денари. **4.** 27532,75 денари. **5.** 54743,25 денари.

7.5.

1. а) 24 години, 6 месеци и 28 дена; б) 23 години, 7 месеци и 11 дена. **2.** а) 39,19 тримесечја; б) 39,36 тримесечја **3.** а) 11,6196% p.a.(a); б) 11,97% p.a.(d);

4. 3,925% p.a.(d). **5.** 5% $p.q.(d)$, 4,7 $p.a.(a)$. **6.** 10,077 години. **7.** 25% $p.s.(d)$. **8.** 8,5% $p.a.(d)$. **9.** 3 години, 1 месец и 18 дена.

7.6.

1. Со комбиниран метод 211440 денари, а само со сложена каматна сметка 210897,5 денари. **2.** 35546,5 денари. **3.** 112120 денари. **4.** 10930 денари. **5.** 186760 денари долг. **6.** а) 42252,7 денари, со камата 7747,3 денари; б) 42254,6 денари, со камата 7745,4 денари. **7.** 27 години. **8.** 17,175 години. **9.** 21729,79 денари. **10.** 226765,67 денари. **11.** Последната понуда, 164893,32. **12.** 21,65 тримесечја. **13.** 1,95%. **14.** 125584 денари. **15.** 474831,14 денари. **16.** Поповолна е првата понуда, втората понуда е помала и изнесува 52304,28 денари. **17.** 18 години 4 месеци и 29 дена. **18.** 5209,48 денари. **19.** 6,6% $p.a.(d)$. **20.** 7,57% $p.a.(d)$. **21.** за време од 24,6 години, а сумата е 10000 денари.

8.2.

1. а) $S_n = 225558$ денари; б) $S_n = 227207$ денари. **2**. $S_n = 120061$ денари. **3**. а) $S_n = 39083$ денари; б) $S_n = 40646$ денари. **4**. а) 479782 денари; б) 482431 денари. **5**. а) 484580 денари; б) 487304 денари. Споредени вредностите од задачите 4 и 5, не доведуваат до заклучок дека антиципативниот влог носи поголема крајна вредност, како и антиципативното вкаматување. Максимална крајна вредност се добива за антиципативен влог со антиципативно вкаматување.

8.3.

1. а) $V = 18781$ денари; б) $V = 18729$ денари. **2**. $V = 10000$ денари. **3**. $V = 2866$ денари. **4**. $V = 4603$ денари. **5**. $V = 6826$ денари.

8.4.

1. а) $n = 6$; б) $n = 5$. **2**. $n \approx 8{,}527$. Тогаш $n = 9$, $V_0 = 93048$ денари. **3**. $n \approx 31{,}195$. Тогаш, $n = 32$, $V_0 = -279$ денари (ова значи дека ќе бидат вратени 279 денари). **4**. $V_0 = 118$ денари. **5**. $n = 18$.

8.5.

1. $\frac{p}{2} = 4\%$. **2**. $\frac{p}{3} = 3{,}97\%$. **3**. а) 2,436%; б) 2,674%. **4**. $p = 8\%$. **5**. $p = 7{,}55\%$.

8.6.

4. $M_n = 119041$ денари. **5**. а) $M_n = 15726$ денари; б) $M_n = 16355$ денари. **6**. $M_n = 637300$ денари. **7**. $V = 5695$ денари. **8**. 68044 денари.

8.7.

1. За декурзивно вкаматување 7076,5 денари, за антиципативно вкаматување 7089,5 денари. **2**. $R = 16700$ денари. **3**. $R = 7575$ денари. **4**. $R = 5991$ денари. **5**. $R = 1670{,}5$ денари.

8.8.

1. 10 ренти. **2**. $n=8$, 4 години. **3**. $n=12$, $R_0=32667$ денари. **4**. $n=60$, $R_0=2160$ денари. **5**. $n=35$, $R_0=28$ денари.

8.9.

1. $p=16{,}8\%$ $p.a(d)$. **2**. $p=5{,}756\%$ $p.a(d)$. **3**. $p=8\%$ $p.a(d)$. **4**. 9,13% $p.a(d)$. **5**. 31136 денари.

8.10.

1. $R=3400$ денари. **2**. 5220 денари. **3**. 4200 денари. **4**. 25000 денари. **5**. 203454 денари.

8.11.

1. 27403 денари. **2**. 1480 денари. **3**. 4 влога. **4**. 6,54%. **5**. 8 години. **6.** $M_n=286159{,}2$ денари. **7**. $R=2475{,}25$ денари. **8**. $n=12$, $R_0=3253{,}2$ денари. **9**. 5,75% $p.a(d)$. **10**. 11064,3 денари. **11**. 45000 денари. **12**. 175600 денари. **13**. 50000 денари. **14**. Пред 3 години. **15**. 1128 денари. **16**. 83972 денари. **17**. 870058 денари. **18**. 15940 денари. **19**. 202716 денари. **20**. 4850 денари.

9.2

1. а) 96948,20 денари; б) 195825,05 денари; в) 393619,11 денари. **2.** 34651,4 денари. **3.** 16650 денари. **4.** 8903,64 денари. **5.** 3057,85 денари.

9.3.

1. 16882,63 денари. **2.** Ануитетот е 17483,63 денари. **3.** Заемот е 713182,32 денари. **4.** 9538,09 денари. **5.** 5606,87 денари.

9.4.

1. Остаток од 156137,24 денари. **2.** Отплата 34462,95 денари. **3.** Заем од 91269,92 денари. **4.** 27058,08 денари. **5.** 597738,82 денари.

9.5.

1. $8\%\,p.a.(d)$. **2.** 50 ануитети, за $n=25$ години. **3.** $3{,}67\%\,p.a.(d)$. **4.** 4,13%. **5.** $n=10$ години.

9.6

1. $a=19076{,}19$ денари, а амортизациониот план е прикажан со следната табела:

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	100000	4000	15076,19	19076,19
2	84923,81	3396,95	15679,24	19076,19
3	69244,57	2769,78	16306,41	19076,19
4	52938,16	2117,53	16958,66	19076,19
5	35979,50	1439,18	17637,01	19076,19
6	18342,49	733,70	18342,49	19076,19
Сума	361428,53	14457,14	100000	

2. $a = 15761{,}4$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	80000	4000	11761,4	15761,4
2	68238,6	3411,93	12349,47	15761,4
3	55889,13	2794,46	12966,94	15761,4
4	42922,19	2146,11	13615,29	15761,4
5	29306,9	1465,35	14296,05	15761,4
6	15010,85	750,54	15010,86	15761,4
Сума	291367,67	14568,39	80000,01	

3. $a = 21631{,}54$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	100000	8000	13631,54	21631,54
2	86368,46	6909,47	14722,07	21631,54
3	71646,39	5731,71	15899,83	21631,54
4	55746,53	4459,72	17712,82	21631,54
5	38574,74	3085,98	18545,56	21631,54
6	20029,18	1602,36	20029,18	21631,54
Сума	372365,33	29789,24	100000	

4. $a = 3154{,}71$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	10000	100	2154,71	3154,71
2	7846,29	784,6	2370,18	3154,71
3	5475,12	547,51	2067,19	3154,71
4	2867,92	286,83	2867,92	3154,71
Сума	26188,33	2618,33	10000	

5. Формирај систем од податоците за последните две камати. Се добиваат $r=1{,}1$, $n=6$, $a=35431{,}22$, $Z=154312{,}2$. Со овие податоци може да се состави амортизационен план.

9.7.

1. $Z=142857{,}14$ денари. **2.** 31 година. **3.** 14 периоди. **4.** $Z=100000$ и $a=30000$. **5.** $a=10000$ денари.

9.8.

1. $a_1=1467{,}83$ денари,

период	остаток од долгот	камата	отплата
1	60000	2400	1600
2	58400	2336	1664
3	56736	2269,44	1730,56
4	55005,44	2200,22	1799,78
5	53205,66	2128,23	1871,77
6	51333,89	2053,36	1946,64
7	49387,25	1975,49	2024,51
8	47362,74	1894,51	2105,49
9	45257,25	1810,29	2189,71
10	43067,54	1722,70	2277,30
11	40790,24	1631,61	2368,39
12	38421,85	1536,87	2463,13
13	35958,72	1438,35	2561,65
14	33397,07	1335,88	2664,12
15	30732,95	1229,32	2770,68
16	27962,27	1118,49	2881,51
17	25080,76	1003,23	2996,77
18	22083,99	883,36	3116,64
19	18967,35	758,69	3241,31
20	17526,04	629,04	3370,96
21	12355,08	494,20	3370,96
22	8849,28	353,97	3646,03
23	5203,25	208,13	3791,87
24	1411,38	56,56	1411,38

2. Ануитетот е 3000 денари.

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	20000	600	2400	3000
2	17600	528	2472	3000
3	15128	453,84	2546,16	3000
4	12581,84	377,46	2622,54	3000
5	9959,30	298,78	2701,22	3000
6	7258,08	217,74	2782,26	3000
7	4475,82	134,27	2865,73	3000
8	1610,09	48,30	1610,09	1658,39

3. $a = 2800$, $a_1 = 455{,}7$

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	8000	400	2400	2800
2	5600	280	2520	2800
3	3080	154	2646	2800
4	434	21,7	434	455,7
сума	17144	855,7	8000	

4. $a = 60000$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	200000	8000	52000	60000
2	148000	5920	54080	60000
3	93920	3756,8	56243,2	60000
4	37676,8	1507,07	37676,8	39183,87
Сума	479596,8	19183,87	200000	

5. $a = 2000$ денари, $a_1 = 1290{,}82$

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	20000	400	3600	2000
2	16400	328	3672	2000
3	12728	254,56	3745,44	2000
4	8982,56	179,65	3820,35	2000
5	5162,26	103,25	3896,75	2000
6	1265,51	25,31	1265,51	1290,82

9.9.

1. Ануитет 36386,32 денари, вкупна камата 51090,56 денари. **2.** 230982,04 денари. **3.** 10006,18 денари. **4.** 266467 денари. **5.** 15300 денари. **6.** Заем 468019 денари, отплатени се 200000 денари, остатокот на долгот е 268015 денари, а каматата е 165634 денари. **7.** 45856,62 денари. **8.** 9126992 денари. **9.** Заем од 36739,58 денари, преостанат долг 12763,67 денари. **10.** 13140881 денар. **11.** 1877255 денари. **12.**. 46 цели ануитети и 47 – миот нецелосен. **13.** 862025 денари. **14.** 6. **15.** 2%. **16.** 2%. **17.** 17705,37 денари. **18.** $a = 20164{,}71$ денари, $O_{12} = 158449{,}71$ денари и $R_8 = 141550{,}29$ денари.

19. $a = 92298{,}75$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	500000	15000	77298,75	92298,75
2	422701,25	12681,04	79617,71	92298,75
3	343087,54	10292,51	82006,24	92298,75
4	261077,3	7832,32	84466,43	92298,75
5	176610,87	5298,33	87000,42	92298,75
6	89610,45	2681,31	89614,45	92298,75
Сума	1793083,41	53792,51	500000	

20. $a = 55415{,}31$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	1000000	10000	45415,31	55415,31
2	954584,69	9545,85	45869,6	55415,31
3	908715,23	9087,15	46328,16	55415,31
4	862387,07	8623,87	46791,44	55415,31

21. $a = 25364{,}84$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
10	73149,23	1462,99	23901,85	25364,84
11	49247,38	984,95	24379,89	25364,84
12	24867,49	497,35	24867,49	25364,84

22. Состави систем за остатоците R_n, R_{n-1}, од каде $n = 5$, $a = 48666{,}12$ денари, а заемот $Z = 216653$ денари. **23.** 14 периоди, односно 3,5 години. **24.** $a = 16000$ денари, а заемот

$Z = 200000$ денари. **25.** $a = 16000$ денари, заемот $Z = 200000$ денари, а последниот ануитет $a_1 = 14432$ денари.

26. $a = 30000$ денари,

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата	Ануитет
1	120000	4800	25200	30000
2	94800	3792	26208	30000
3	68592	2743,68	27256,32	30000
4	41335,68	1653,43	28346,57	30000
5	12899,11	515,96	12899,11	13415,07

27. $p_1 = 4\%, a = 4000, i_1 = 3000, b_1 = 3750, a_1 = 5987{,}27$. **28.** $p_1 = 15\%, p = 4\%,$ $a_1 = 2728{,}79, b_1 = 2200, i_1 = 800$. **29.** $p = 4\%, p_1 = 30\%, a = 30000, Z = 100000$. **30.** $p_1 = 7{,}5\%, a = 7500, i_1 = 2000, b_1 = 5500$. **31.** $a = 12372{,}22$. **32.** $Z = 500000$. **33.** $Z = 300000$, $a = 13965{,}06$. **34.** $2n = 23$, $a_1 = 51235{,}02$.

Користена литература

1. Arnold Glen, Essentials of Corporate Financial Management, Harlow, UK, 2007

2. Berk,J and De Marzo,P, Corporate Finance, Harlow, UK, 2009

3. Fabozzi J. Frank, Franco Moodigliani, Michael G. Ferri, Foundation of financial markets and institutions, 2nd ed., 2000

4. Gitman, Principles of Managerial Finance, Addison - Wesley, 2007

5. Gitman, Principles of Managerial Finance, 12th edn, Pearson, 2009

6. Mishkin, Eakins, Financial Markets and Institutions, Pearson, 2007

7. Sam Y. Cross, The Foreign Exchage Market, Federeal Reserve Bank of New York, 1998

8. S. G. Kellison, The theory of interest, Georgia State University, Irwin, 1991

9. Teresa Bradley, Paul Patton, Essential Mathematics for Economics and Business, John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2002

10. Б. Попов, Математика за IV клас за стручните училишта, Просветно дело, Скопје, 1977

11. В. Враниќ, Основи финансијске и актуарске математике, Загреб 1964

12. Г. Тренчевски, Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2001

13. Д. Јанев, З. Коловски, Г. Билбиловска, М. Стојановски, Математика за економисти, збирка задачи, Савремена администрација, Београд, 1991

14. Е. Стипаниќ, Математика за III и IV разред гимназије друштвено - језичног смера, Завод за издавање уџбеника Народне Републике Србије, Београд, 1962

15. З. Ивановски, А. Станковска, Девизна политика, Европски универзитет, 2007

16. К. Сориќ, Збирка задатака из математике с примјеном у економији, Елемент, Загреб, 2005

17. К. Тренчевски, Б. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска, Математичка анализа за четврта година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, 2003

18. М. Ивовиќ, Финансијска математика, Економски факултет, Београд, 2003

19. Н. Давидовиќ, Основи на математиката за економисти, Култура, Скопје, 1975

20. Р. Раљевиќ, Финансијска и актуарска математика, Савремена администрација, Београд, 1975

Автори

Костадин Тренчевски
Анета Гацовска
Надица Ивановска

Лектура

Маја Цветковска

Компјутерска обработка

Авторите